ارایه مدل برنامه ریزی زمانبندی حرکت قطارها با درنظر گرفتن محدودیتهای ویژه مسیرهای تک‌خطه در شبکه ریلی ایران

محمود صفارزاده، استاد، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
مسعودیقینی، استادیار، دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم وصنعت ایران، تهران، ایران
محمد تمنایی(مسئول مکاتبات)، دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
E-mail: m_tamannaei@yahoo.com

دریافت: ۹۱/۰۵/۱۶ پذیرش: ۹۲/۰۲/۲۳

چکیده

در راه‌آهن ایران، قوانین، محدودیتها و نیازهای ویژه‌ای وجود دارد که برنامه‌ریزی حمل و نقل ریلی باید متناسب با این نیازها به صورت جامع در نظر گرفته شود. در این مطالعه، یک مدل بهینه‌سازی جدید برای مدل سازی شبکه ریلی ارایه شده‌است. این مدل به منظور تولید جدول زمانبندی حرکت قطارهای مسافری و باری در مسیرهای تک‌خطه ریلی ارایه شده‌است. از ویژگیهای بارز این مدل، متناسب بودن آن با محدودیتهای خاص مربوط به مسیرهای ریلی ایران است. مدل با هدف کمینه کردن مجموع تأخیر قطارهای مسافری و باری در مسیرهای رفت و برگشت است. نوآوری اصلی مدل، ارایه دسته محدودیتهایی برای بررسی و ارزیابی ظرفیت خطوط پهلوگیری در ایستگاهها و نیز توقف، برای ادای فریضه نماز در ایستگاهها است. محدودیتهای ارزیابی ظرفیت خطوط پهلوگیری، کفایت تعداد خطوط پهلوگیری برای توقف قطار در آن ایستگاه را بررسی و امکان توقف یا عبور قطار را مهیا می‌کند و یا برنامه به نحوی تغییر می کند تا ظرفیت خالی برای ورود قطار به ایستگاه فراهم شود. محدودیتهای اقامه نماز تنها برای قطارهای مسافری بکار گرفته می‌شوند و به بررسی امکان تلاقی زمان سفر هر قطار با بازه زمانی اقامه نماز می‌پردازد و در صورتی که قطار ناگزیر به توقف برای نماز در یکی از ایستگاههای بین راهی است، بهترین ایستگاه انتخاب می‌شود. ورودیهای مدل، شامل خصوصیات شبکه ریلی، نوع قطارها و نیز زمانهای مجاز برای اقامه نماز هستند. به منظور ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی، مسائل آزمایشی توسط نرم‌افزار لینگو حل شده‌اند. با استفاده از مدل پیشنهادی، می‌توان زمانبندی حرکت قطارهای مسافری و باری در مسیرهای تک‌خطه ریلی ایران را به صورت مکانیزه انجام داد.

واژه‌های کلیدی: زمانبندی حرکت قطارها، ظرفیت ایستگاه، اقامه نماز، بهینه‌سازی، راه‌آهن ایران

۱. مقدمه

در راه‌آهن ایران، قوانین، محدودیتها و نیازهای ویژه‌ای وجود دارد که برنامه‌ریزی حمل و نقل ریلی بایستی متناسب با این نیازها به صورت جامع در نظر گرفته شود. یکی از ابعاد مهم برنامه‌ریزی حمل و نقل ریلی، موضوع زمانبندی حرکت قطارهاست. زمانبندی حرکت قطار، تعیین زمانهای ورود و خروج هر قطار در هر ایستگاه با توجه به محدودیتهای زمان سفر و محدودیتهای ایمنی حرکت قطارهاست. یکی از مشکلاتی که در اکثر نقاط شبکه راه‌آهن کشور وجود دارد، کمبود تعداد خطوط پهلوگیری برای توقف قطارهای مسافری و باری در ایستگاههای بین راهی است. این مسئله به نوبه خود سبب کاهش استفاده از ظرفیت زیرساخت ریلی شده‌است و دلایل مختلفی از جمله هزینه‌های اقتصادی زیاد، برای احداث دارد. همچنین یکی از الزاماتی که در شبکه ریلی ایران وجود دارد، محدودیت توقف اجباری قطارهای مسافری برای ادای فریضه نماز و نبود یک مدل جامع برای برآورده کردن این محدودیت از دیگر مشکلات سیستم حمل و نقل ریلی کشور در بخش قطارهای باری است. متأسفانه زمانبندی حرکت قطارها در ایران هنوز به صورت برنامه‌ریزی‌شده (برنامه‌ای) انجام نمی‌شود. این مسئله سبب کاهش کیفیت خدمت‌رسانی به مشتریان حمل ریلی بار شده‌است که به نوبه خود تأثیر منفی بر بازاریابی سیستم ریلی – که یکی از عوامل اساسی رقابت بین حمل و نقل ریلی با دیگر انواع حمل و نقل است برجای گذاشته و هزینه‌های اقتصادی زیادی بر راه‌آهن کشور تحمیل کرده‌است. از این رو، بهبود زمانبندی حرکت قطارها دارای اهمیت اقتصادی بسیار نیز هست.

هدف از این پژوهش، ارایه مدلی برای برنامه ریزی زمانبندی حرکت قطارهای مسافری و باری در مسیرهای تک‌خطه[1] ریلی است. از ویژگیهای بارز این مدل، متناسب بودن آن با محدودیتهای خاص مربوط به مسیرهای ریلی ایران است. در این مدل، محدودیتهایی همچون ظرفیت خطوط پهلوگیری[2] در ایستگاهها و نیز محدودیت اقامه فریضه نماز در ایستگاهها، مورد بررسی قرار گرفته است.

در بخش دوم، مروری بر ادبیات موضوع زمانبندی حرکت قطارها انجام شده‌است. در بخش سوم، مدل برنامه ریزی ریاضی پیشنهادی ارایه شده‌است. در این بخش، محدودیتهای اولیه[3] و محدودیتهای ثانویه[4] به تفکیک ارایه شده‌اند. به منظور ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی، مسائل آزمایشی با ابعاد مختلف توسط نرم‌افزار لینگو۱۱ حل شده و در بخش چهارم ارایه شده‌اند. در انتها جمع‌بندی و نتیجه‌گیری انجام شده‌است.

۲. مروری بر ادبیات موضوع

مسئله زمانبندی حرکت قطارها یکی از مهم ترین مسائل در حیطه برنامه ریزی راه آهن به شمار می آید. اولین بار اسپیگل در سال ۱۹۷۳ این مسئله را با هدف کاهش مجموع تأخیرات مورد بررسی قرار داد [Szpigel, 1973]. از آن تاریخ تاکنون پژوهشگران، مدلهای ریاضی مختلفی را با در نظر گرفتن شرایط ویژه کشورشان ارایه کرده‌اند. در زیر به تعدادی از این مدلها اشاره می‌شود.

هیگینز و همکاران مدلی برای راه‌آهن استرالیا ارایه کرده‌اند. این مدل شامل بلاکهای تک‌خطه و دوخطه بوده که با استفاده از الگوریتم ژنتیک حل شده است [Higgins, et al. 1996]. ساهین مسئله زمانبندی قطارها در خطوط تک‌خطه را با احتساب یک هدوی زمانی بین قطارها، در زمانی که یک حادثه منجر به تأخیر ناخواسته در زمانبندی قطارها رخ می‌دهد، در نظر گرفته است. در این مقاله مثالهای مختلف به همراه یک بخش از مسیر بین راه آهن استانبول– آنکارا از کشور ترکیه مورد بررسی قرار گرفته است [Sahin, 1999]. یوسف شفاهی، زمانبندی حرکت قطارها را با هدف بیشینه کردن قابلیت اطمینان برنامه مورد توجه قرار داده است. در این مطالعه ابزار تحلیل روش شبیه سازی و مطالعه موردی مسیر تهران– مشهد انتخاب شده است [Shafahi and Sadeghi] . قصیری و همکاران در مقاله‌ای، مسئله زمانبندی قطارها در یک شبکه راه آهن را به کمک یک مدل ریاضی با دو هدف کمینه کردن مصرف سوخت و کمینه کردن تأخیر قطارها ارایه کردند. در این مقاله، چند مثال عددی جهت اعتباردهی به مدل ارایه شده مورد بررسی قرار گرفته است [Ghoseiri, et

al. 2004]. در مطالعه‌ای که توسط ژو و ژونگ انجام شد، مسئله زمانبندی قطارهای سریع السیر و قطارهای با سرعت متوسط در یک مسیر دوخطه را به کمک یک مدل عدد صحیح دو هدفه فرموله شد و یک مطالعه موردی مربوط به مسیر راه آهن سریع السیر پکن-شانگهای در چین انجام گردید [Zhou, 2005]. کاپرارا و همکاران مسئله زمانبندی قطارها در یک مسیر دوخطه تک‌جهته در ایتالیا را مورد بررسی قرار داده‌اند[Caprara, et al. 2006]. تورن کوئیست و پیرسون مسئله زمانبندی قطارها را در شبکه راه آهن سوئد مدنظر قرار داده‌اند. در این مقاله روشهایی برای حل مسئله ارایه شده و نتایج از لحاظ دستیابی به جواب بهتر و سرعت در رسیدن به جواب مقایسه شده‌اند [Tornquist, 2007]. دی‌آریانو و همکاران، در مقاله خود، مسئله زمانبندی مجدد قطارها در یک شبکه راه آهن را بر مبنای زمانبندی کار کارگاهی مورد مطالعه قرار داده‌اند. روش حل پیشنهادی ایشان بر مبنای ارایه یک الگوریتم حل به کمک روش شاخه و حد است. همچنین یک مطالعه موردی مربوط به منطقه‌ای از شبکه راه آهن آلمان در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است [D'Ariano, et al. 2007]. کاچیانی و همکاران، الگوریتمهای ابتکاری و دقیق برای مسئله زمانبندی حرکت قطارها در حالات دوره ای و غیر دوره ای ارایه کرده اند. در این پژوهش، مطالعه موردی مربوط به برخی از خطوط راه آهن ایتالیا مورد بررسی قرار گرفته است [Cacchiani, 2008]. جمیلی و کیانفر، مدل ریاضی زمانبندی حرکت قطارها با هدف حداقل کردن تأخیرات قطارها را توسعه داده‌اند. در این مطالعه، الگوریتم حل مسئله به کمک روش عملیات حرارتی شبیه‌سازی شده ارایه شده‌است [Jamili and Kianfar, 2009] . خادم ثامنی یک مدل ریاضی برای زمانبندی حرکت قطارها در خطوط دوخطه ارایه کرده است. در این مدل، محدودیت اقامه نماز در نظر گرفته شده‌است [Kh -dem Sameni, 2007]. یقینی و محمدزاده مدلی با هدف کمینه کردن مجموع تأخیرات قطارها با در نظر گرفتن زمانهای توقف اجباری برای ادای فریضه نماز ارایه کرده‌اند. در این پژوهش، چند مسئله آزمایشی برای ارزیابی مدل بررسی شده‌اند [Yaghini and Mohammadzadeh, 2011]. کورمن و همکاران مدلی برای حل مسئله زمانبندی قطارها ارایه کرده‌اند و به منظور حل آن از روش فوق ابتکاری جستجوی ممنوعه بهره برده اند. استفاده از این روش، به تولید جوابهای بهتر و در مدت زمان کوتاه‌تر کمک کرده‌است [Corman, 2009]. بوردت و کوزن جهت حل مسئله زمانبندی حرکت قطارها یک روش جدید تلفیقی بر پایه زمانبندی کار کارگاهی ارایه کرده‌اند. در این مدل مسئله توسط یک گراف منفصل نمایش داده شده‌است. همچنین مثالهایی برای ارزیابی مدل معرفی شده‌است [Burdett and Kozan, 2010]. مو و همکاران مسئله بهینه سازی را با رویکرد زمانبندی حرکت قطارهای باری توسعه دادند. در این مطالعه جهت روش حل از الگوریتم تجزیه استفاده شده است[Mu et al., 2011].

۳. مدل برنامه ریزی ریاضی

در این بخش، مدل برنامه ریزی ریاضی پیشنهادی برای زمانبندی حرکت قطارهای مسافری و باری ارایه می‌شود. تابع هدف مدل ارایه شده در این پژوهش، کمینه کردن زمان تأخیر قطارهای مسافری و باری است. مجموعه محدودیتهای این مدل در حالت کلی به دو بخش تقسیم می‌شوند:

الف) محدودیتهای اولیه: منظور از محدودیتهای اولیه موارد الزامی است که در تمامی مسائل زمانبندی حرکت قطارهای تک‌خطه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ب) محدودیتهای ثانویه: منظور از محدودیتهای ثانویه، مواردی است که به جهت افزایش میزان کاربردی بودن و نزدیک به واقعیت شدن مسئله زمانبندی حرکت قطارها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مطالعه، محدودیتهای ثانویه در دو بخش بررسی شده‌اند: محدودیتهای ظرفیت ایستگاه و محدودیتهای اقامه نماز. همچنین به منظور تفکیک قطارهای گذرنده از جهات رفت و برگشت در مسیرهای تک‌خطه، قطارهای مسیر رفت با عنوان «قطارهای شمالی» و قطارهای مسیر برگشت با عنوان «قطارهای جنوبی» معرفی شده‌اند.

۳-۱ مجموعه ها:

NP مجموعه قطارهای مسافری[۵] که به سمت شمال حرکت می‌کنند.

SP مجموعه قطارهای مسافری که به سمت جنوب حرکت می‌کنند.

NC مجموعه قطارهای باری[۶] که به سمت شمال حرکت می‌کنند.

SC مجموعه قطارهای باری که به سمت جنوب حرکت می‌کنند.

N مجموعه قطارهایی که به سمت شمال حرکت می‌کنند $N = NP \cup NC$

S مجموعه قطارهایی که به سمت جنوب حرکت می‌کنند. $S = SP \cup SC$

B مجموعه بلاک‌های مسیر

B^1_i مجموعه بلاک‌هایی که قطار شمالی i طی می‌کند $B^1_i \subseteq B$

B^0_i مجموعه بلاک‌هایی که قطار جنوبی i طی می‌کند $B^0_i \subseteq B$

M مجموعه نوبتهای ادای فریضه نماز

BP مجموعه ایستگاههایی که دارای نمازخانه هستند.

۳-۲ پارامترها، متغیرهای تصمیم و تابع هدف:

نمادهای مورد استفاده در تابع هدف و محدودیتهای مدل در جدول شماره ۱ نامگذاری شده‌اند.

در این مدل، تابع هدف به صورت حداقل کردن زمان تأخیر کل قطارها (شامل قطارهای شمالی و جنوبی، مسافری و باری) تعریف می‌شود:

$$Min\ z = \sum_{i \in N}\left(G^1_i \times \left(X^1_{i,bd_i} - Y^1_{i,bo_i}\right)\right) + \sum_{i \in S}\left(G^0_i \times \left(X^0_{i,bd_i} - Y^0_{i,bo_i}\right)\right) \quad (۱)$$

بخش اول تابع هدف، مربوط به قطارهای باری و مسافری شمالی و بخش دوم مربوط به قطارهای باری و مسافری جنوبی است.

۳-۳ محدودیتهای اولیه:

(الف) پنجره زمانی حرکت از مبدأ:

$$EO_{bo_i} \le Y^w_{i,bo_i} \le LO_{bo_i} \quad (۲)$$
$$\forall i \in (N \cup S), \forall w \in \{1,0\}$$

دسته محدودیت (۲) بیانگر آن است که زمان حرکت هریک از قطارهای شمالی و جنوبی از مبدأ خود، باید بین زودترین و دیرترین زمان تعیین‌شده حرکت آن قطار باشد. زودترین و دیرترین زمان تعیین‌شده حرکت قطارها به عنوان ورودیهای مدل هستند.

(ب) حداقل و حداکثر زمان توقف قطارهای مسافری:

$$STmin_{i,b} \le Y^1_{i,(b+1)} - X^1_{i,b} \le STmax_{i,b} \quad (۳$$
$$\forall i \in N, \forall b \in B - \{bd_i\}$$

$$STmin_{i,b} \le Y^0_{i,(b-1)} - X^0_{i,b} \le STmax_{i,b} \quad (٤)$$
$$\forall i \in S, \forall b \in B - \{bd_i\}$$

دسته محدودیتهای (۳) و (٤) بیانگر حداقل و حداکثر زمان توقف پیش‌بینی شده قطارها هستند که به عنوان ورودی مدل در نظر گرفته می‌شوند. توقف قطارهای مسافری در ایستگاهها به دلایل مختلف همچون پیاده و سوار کردن مسافران انجام می‌شود. همچنین به منظور برنامه‌ای کردن حرکت قطارهای باری، لازم است کمینه و بیشینه زمان توقف در ایستگاهها برای این قطارها نیز پیش‌بینی شود.

(پ) زمان طی بلاک:

$$\frac{d_b}{V_{max_i,b}} \le X^j_{i,b} - Y^j_{i,b} \le \frac{d_b}{V_{min_i,b}} \quad (۵)$$
$$\forall i \in (N \cup S), \forall b \in B, \forall j \in \{1,0\}$$

دسته محدودیت (۵) بیان می‌کند که زمان طی بلاک توسط هریک از قطارهای شمالی و جنوبی، بایستی بین بیشترین و کمترین زمان مجاز باشد. طول بلاکها و نیز حداقل و حداکثر سرعت مجاز برای هر قطار مسافری یا باری در بین هر دو ایستگاه متوالی، به عنوان ورودیهای مدل هستند.

(ت) حفظ پیوستگی در حرکت قطارها:

$$Y^1_{i,b} \ge X^1_{i,(b-1)} \quad \forall i \in N, \forall b \in B^1_i, b \ge bo_i + 1 \quad (٦)$$

دسته محدودیت (٦) خاص قطارهای شمالی (اعم از مسافری یا باری) است. این محدودیت بیانگر آن است که زمان شروع به

جدول ۱. نمادهای مورد استفاده در مدل برنامه ریزی ریاضی

G_i^1 ضریب اولویت وزنی قطار شمالی **i**

bo_i اولین بلاکی که توسط قطار **i** پیموده می‌شود.

EO_{bo_i} زودترین زمان مجاز برای خروج قطار **i** از مبدأش.

$STmax_{i,b}$ حداکثر مدت زمان توقف پیش‌بینی شده قطار **i** در ایستگاه انتهای بلاک **b**

d_b طول بلاک **b**

$V_{max_{i,b}}$ حداکثر سرعت مجاز قطار**i** در بلاک **b**

$X_{i,b}^1$: متغیر پیوسته، زمان رسیدن قطارشمالی **i** به انتهای بلاک **b**

$Y_{i,b}^1$: متغیر پیوسته، زمان شروع به حرکت قطار شمالی **i** از ابتدای بلاک **b**

A_{ijb}: متغیر دوتایی، اگر قطار شمالی **i** زودتر از قطار شمالی **j** وارد بلاک **b** شود، این متغیر مقدار ۱ می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

C_{ijb}: متغیر دوتایی، اگر قطار شمالی **i** زودتر از قطار جنوبی **j** وارد بلاک **b** شود، این متغیر مقدار ۱ می‌گیرد و در غیر ای نصورت مقدار صفر می‌گیرد.

θ_{ijb}^1 (θ_{ijb}^0): متغیر دوتایی نشاندهنده اشغال بودن خطی از خطوط پهلوگیری ایستگاه انتهای بلاک **b** به علت تلاقی دو قطار شمالی (جنوبی) **i** و **j** است.

β_{ib}^1 (β_{ib}^0): متغیر دوتایی برابر با یک است، اگر زمان شروع به حرکت قطار شمالی (جنوبی) **i** از ابتدای بلاک **b+1 (b-1)** برابر با زمان رسیدن این قطار به انتهای بلاک **b** باشد. به عبارت دیگر قطار در ایستگاه توقف نداشته‌باشد.

$EP_{b,m}$: زودترین زمان مجاز برای توقف قطارها برای نماز نوبت **m** در ایستگاه انتهای بلاک **b** (لحظه اذان نماز نوبت **m**)

PO_m: مدت زمان بعد از شروع بازه نماز نوبت **m** که مسافرین امکان ادای فریضه نماز در ایستگاه مبدأ را دارند.

$ZE_{i,b,m}^1$ ($ZE_{i,b,m}^0$) متغیر تصمیم دوتایی: اگر زمان رسیدن قطار شمالی (جنوبی) **i** به انتهای بلاک **b** مساوی یا بعد

G_i^0 ضریب اولویت وزنی قطار جنوبی **i**

bd_i آخرین بلاکی که توسط قطار **i** پیموده می‌شود.

LO_{bo_i} دیرترین زمان مجاز برای خروج قطار **i** از مبدأش.

$STmin_{i,b}$ حداقل مدت زمان توقف پیش‌بینی شده قطار **i** در ایستگاه انتهای بلاک **b**

H_{ijb} حداقل سرفاصله قطارهای **i** و **j** در ایستگاه انتهای بلاک **b**

$V_{min_{i,b}}$ حداقل سرعت مجاز قطار**i** در بلاک **b**

$X_{i,b}^0$: متغیر پیوسته، زمان رسیدن قطارجنوبی **i** به انتهای بلاک **b**

$Y_{i,b}^0$: متغیر پیوسته، زمان شروع به حرکت قطار جنوبی **i** از ابتدای بلاک **b**

B_{ijb}: متغیر دوتایی، اگر قطار جنوبی **i** زودتر از قطار جنوبی **j** وارد بلاک **b** شود، این متغیر مقدار ۱ می‌گیرد و در غیر اینصورت مقدار صفر می‌گیرد.

NS_b^1 (NS_b^0): تعداد خطوط پهلوگیری ایستگاه انتهای بلاک **b** ویژه قطارهای شمالی (جنوبی)

α_{ijb}^1 (α_{ijb}^0): متغیر دوتایی برابر با یک است، اگر زمان شروع به حرکت قطار شمالی (جنوبی) **j** از ابتدای بلاک **b+1 (b-1)** بزرگتر یا مساوی با زمان رسیدن قطار شمالی (جنوبی) **i** به انتهای بلاک **b** باشد.

γ_{ib}^1 (γ_{ib}^0): متغیر دوتایی برابر با یک است، اگر زمان شروع به حرکت قطار شمالی (جنوبی) **i** از ابتدای بلاک **b+1 (b-1)** بزرگتر از زمان رسیدن این قطار به انتهای بلاک **b** باشد. به عبارت دیگر قطار در ایستگاه توقف داشته‌باشد.

$LP_{b,m}$: دیرترین زمان مجاز برای توقف قطارها برای نماز نوبت **m** در ایستگاه انتهای بلاک **b**

PD_m: مدت زمان قبل از پایان بازه نماز نوبت **m** که مسافران امکان ادای فریضه نماز در ایستگاه مقصد را دارند.

$ZL_{i,b,m}^1$ ($ZE_{i,b,m}^0$) متغیر تصمیم دوتایی: اگر زمان رسیدن قطار شمالی (جنوبی) **i** به انتهای بلاک **b** مساوی یا قبل از

ادامه جدول ۱. نمادهای مورد استفاده در مدل برنامه ریزی ریاضی

از $EP_{b,m}$ باشد، این متغیر مقدار یک می‌گیرد و در غیر اینصورت مقدار صفر می‌گیرد.	$LP_{b,m}$ باشد، این متغیر مقدار یک می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.
$Z^1_{i,b,m}$ ($ZE^0_{i,b,m}$) متغیر تصمیم دوتایی: اگر زمان رسیدن قطار شمالی (جنوبی) **i** به انتهای بلاک **b** در بازه زمانی مجاز برای ادای نماز نوبت **m** (یعنی بین زمان‌های $EP_{b,m}$ و $LP_{b,m}$) باشد، متغیر مقدار یک و در غیر اینصورت مقدار صفر خواهد گرفت.	$\delta O^1_{i,m}$ ($\delta O^0_{i,m}$) متغیر تصمیم دوتایی: اگر زمانی که قطار شمالی (جنوبی) **i** از ایستگاه مبدأ خود خارج می‌شود، مساوی یا بیشتر از PO_m دقیقه، از $EP_{b,m}$ گذشته باشد، این متغیر مقدار صفر می‌گیرد و در غیر اینصورت مقدار یک می‌گیرد.
$\delta D^1_{i,m}$ ($\delta D^0_{i,m}$) متغیر تصمیم دوتایی: اگر زمانی که قطار شمالی (جنوبی) **i** به ایستگاه مقصد خود وارد می‌شود، مساوی یا کمتر از PD_m دقیقه، به $LP_{b,m}$ مانده باشد، این متغیر مقدار صفر می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار یک می‌گیرد.	$\delta^1_{i,m}$ ($\delta^0_{i,m}$) متغیر تصمیم دوتایی: اگر با توجه به زمانهای خروج از مبدأ و ورود به مقصد، نیاز به توقف اجباری قطار شمالی (جنوبی) **i** برای ادای نماز نوبت **m** در ایستگاههای بین راهی باشد، این متغیر مقدار یک و در غیراینصورت مقدارصفر می‌گیرد.
$\mu^1_{i,b,m}$ ($\mu^0_{i,b,m}$) متغیر تصمیم دوتایی: اگر ایستگاه بین راهی انتهای بلاک **b** برای توقف قطار شمالی (جنوبی) **i** برای ادای نماز نوبت **m** انتخاب شود، این متغیر مقدار یک می‌گیرد و در غیر اینصورت مقدار صفر می‌گیرد. متغیر $\mu^1_{i,b,m}$ تعیین می‌کند که آیا قطار شمالی (جنوبی) **i** در ایستگاه انتهایی بلاک **b** برای ادای نماز نوبت **m** توقف داشته باشد یا خیر.	TP_m: مدت زمان توقف در ایستگاههای بین راهی برای ادای فریضه نماز نوبت **m**.

حرکت قطار شمالی i از ابتدای بلاکb باید همواره بزرگ تر یا مساوی زمان رسیدن قطار شمالی i به انتهای بلاک قبلی (b-۱) باشد. محدودیت تضمین می‌کند که قطارهای شمالی بلاکها را یکی پس از دیگری طی کنند.

$$Y^0_{i,b} \geq X^0_{i,(b+1)} \quad \forall i \in S, \forall b \in B^0_i, b \leq bo_i - 1 \qquad (۷)$$

دسته محدودیت (۷) خاص قطارهای جنوبی است. این محدودیت بیانگر آن است که زمان شروع به حرکت قطار جنوبی i از ابتدای بلاک b باید همواره بزرگ تر یا مساوی زمان رسیدن قطار جنوبی i به انتهای بلاک قبلی (b+۱) باشد. محدودیت تضمین می‌کند که قطارهای جنوبی بلاکها را یکی پس از دیگری طی کنند.

(ث) عدم برخورد قطارها در بلاک:

این محدودیت در سه حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد:

حالت اول: عدم برخورد قطارهای شمالی با یکدیگر در بلاکها:

$$Y^1_{j,b} + M \times \left(1 - A_{ijb}\right) \geq X^1_{i,b} + H_{ijb} \qquad (۸)$$
$$\forall i, j \in N, \forall b \in B, i \neq j$$

$$Y^1_{i,b} + M \times A_{ijb} \geq X^1_{j,b} + H_{ijb} \qquad (۹)$$
$$\forall i, j \in N, \forall b \in B, i \neq j$$

در این حالت، اگر مقدار A_{ijb} برابر با یک بشود (قطار شمالی i زودتر از قطار شمالی j وارد بلاک b شود)، محدودیت شماره (۸) فعال می‌شود. یعنی زمان شروع به حرکت قطار شمالی j (قطار دوم) از ایستگاه ابتدایی بلاک b بایستی برابر یا بیش از زمان رسیدن قطار شمالیi (قطار اول) به انتهای بلاک b به علاوه سرفاصله بین دو قطار i و j در بلاک b باشد. در غیر این صورت، محدودیت شماره (۹) فعال می‌شود.

حالت دوم: عدم برخورد قطارهای جنوبی با یکدیگر در بلاکها:

$$Y^0_{j,b} + M \times \left(1 - B_{ijb}\right) \geq X^0_{i,b} + H_{ijb} \qquad (۱۰)$$
$$\forall i, j \in S, \forall b \in B$$

$$Y^{0}_{i,b} + M \times B_{ijb} \geq X^{0}_{j,b} + H_{ijb} \quad (11)$$
$$\forall i, j \in S, \forall b \in B$$

در این حالت، اگر مقدار B_{ijb} یک شد (قطار جنوبی i زودتر از قطار جنوبی j وارد بلاک b شود)، محدودیت شماره (۱۰) فعال می‌شود. یعنی زمان شروع به حرکت قطار جنوبی j (قطار دوم) از ایستگاه ابتدایی بلاک b بایستی برابر یا بیش اززمان رسیدن قطار جنوبی i (قطار اول) به انتهای بلاک b به علاوه سرفاصله بین دو قطار i و j در بلاک b باشد. در غیر این صورت، محدودیت شماره (۱۱) فعال می‌شود.

حالت سوم: عدم برخورد قطارهای شمالی با قطارهای جنوبی در بلاکها:

$$Y^{0}_{j,b} + M \times \left(1 - C_{ijb}\right) \geq X^{1}_{i,b} + H_{ijb} \quad (12)$$
$$\forall i \in N, \forall j \in S, \forall b \in B$$

$$Y^{1}_{i,b} + M \times C_{ijb} \geq X^{0}_{j,b} + H_{ijb} \quad (13)$$
$$\forall i \in N, \forall j \in S, \forall b \in B$$

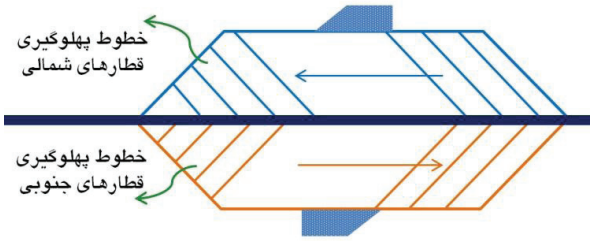
در این حالت، اگر مقدار C_{ijb} یک بشود (قطار شمالی i زودتر از قطار جنوبی j وارد بلاک b شود)، محدودیت شماره (۱۲) فعال می‌گردد. یعنی زمان شروع به حرکت قطار جنوبی j (قطار دوم) از ایستگاه ابتدایی بلاک b بایستی برابر یا بیش از زمان رسیدن قطار شمالی i (قطار اول) به انتهای بلاک b به علاوه سرفاصله بین دو قطار i و j در بلاک b باشد. در غیر این صورت، محدودیت شماره (۱۳) فعال می‌شود.

۳-٤ محدودیتهای ثانویه: ظرفیت خطوط پهلوگیری ایستگاهها

نوآوری اصلی مدل برنامه ریزی ریاضی ارایه‌شده، دسته محدودیتهای مربوط به ظرفیت خطوط پهلوگیری ایستگاه‌هاست. این محدودیتها برای همه قطارهای موجود در مسیر ریلی - اعم از مسافری یا باری- بایستی بکار گرفته شوند.

هریک از ایستگاههای ریلی، دارای خطوط پهلوگیری برای توقف قطارها هستند. همان گونه که در شکل شماره ۱ نشان داده شده است، در یک ایستگاه ریلی، خطوط پهلوگیری مربوط به توقف قطارهای شمالی از خطوط پهلوگیری مربوط به قطارهای جنوبی مجزا هستند. دسته محدودیت‌های ارایه‌شده در این بخش، کفایت تعداد خطوط پهلوگیری برای توقف قطار در آن ایستگاه را مورد بررسی قرار می‌دهد. در صورتی که ظرفیت خالی برای ورود قطار به ایستگاه وجود داشته باشد، محدودیت ظرفیت ایستگاه غیرفعال می‌شود. در غیراین صورت، قطار بدون توقف از ایستگاه عبور می‌کند یا اینکه برنامه به نحوی تغییر می‌کند تا ظرفیت خالی برای ورود قطار به ایستگاه فراهم آید.

θ^{1}_{ijb} نشان دهنده اشغال بودن خطی از خطوط پهلوگیری ایستگاه



شکل ۱. خطوط پهلوگیری مربوط به قطارهای شمالی و جنوبی در یک ایستگاه ریلی

انتهای بلاک b به علت تلاقی دو قطار شمالی i و j است. این متغیر مطابق با حالات مختلفی که در ذیل توضیح داده شده، مقدار یک یا صفر می‌گیرد.

α^{1}_{ijb} برابر با یک است، اگر زمان شروع به حرکت قطار شمالی j از ابتدای بلاک b+۱ بزرگ تر یا مساوی با زمان رسیدن قطار شمالی i به انتهای بلاک b باشد. به عبارت دیگر:

$$Y^{1}_{j,(b+1)} \geq X^{1}_{i,b} \rightarrow \alpha^{1}_{ijb} = 1 \quad (14)$$
$$\forall i, j \in N, \forall b \in B^{1}_{i} - \{bd_{i}\}, i \neq j$$

محدودیت‌های معادل با رابطه شرطی (۱٤) عبارتند از:

$$\begin{cases} Y^{1}_{j,(b+1)} < X^{1}_{i,b} + M \times \alpha^{1}_{ijb} \\ Y^{1}_{j,(b+1)} \geq X^{1}_{i,b} - M \times \left(1 - \alpha^{1}_{ijb}\right) \end{cases} \quad (15)$$
$$\forall i, j \in N, \forall b \in B^{1}_{i} - \{bd_{i}\}, i \neq j$$

β^{1}_{ib} برابر با یک است، اگر زمان شروع به حرکت قطار شمالی i از ابتدای بلاک b+۱ برابر با زمان رسیدن این قطار به انتهای بلاک b باشد. به عبارت دیگر:

$$Y^{1}_{i,(b+1)} = X^{1}_{i,b} \rightarrow \beta^{1}_{ib} = 1$$
$$\forall i \in N, \forall b \in B^{1}_{i} - \{bd_{i}\}$$

محدودیتهای معادل با رابطه شرطی فوق عبارتند از:

$$\begin{cases} 1-\beta^1_{ib} \le \left(Y^1_{i,(b+1)} - X^1_{i,b}\right)\times M \\ M\times\left(1-\beta^1_{ib}\right) \ge X^1_{i,b} - Y^1_{i,(b+1)} \end{cases} \quad (16)$$

$$\forall i \in N, \forall b \in B^1_i - \{bd_i\}$$

γ^1_{ib} برابر با یک است، اگر زمان شروع به حرکت قطار شمالی i از ابتدای بلاک b+1 بزرگ تر از زمان رسیدن این قطار به انتهای بلاک b باشد. به عبارت دیگر:

$$Y^1_{i(b+1)} > X^1_{ib} \rightarrow \gamma^1_{ib} = 1$$
$$\forall i \in N, \forall b \in B^1_i - \{bd_i\}$$

محدودیتهای معادل با رابطه شرطی فوق عبارتند از:

$$\begin{cases} X^1_{i,b} < Y^1_{i,(b+1)} + M\times\left(1-\gamma^1_{ib}\right) \\ X^1_{i,b} \ge Y^1_{i,(b+1)} - M\times\gamma^1_{ib} \end{cases} \quad (17)$$

$$\forall i \in N, \forall b \in B^1_i - \{bd_i\}$$

آشکار است که در صورتی که β^1_{ib} برابر با یک شود، آنگاه γ^1_{ib} برابر با صفر خواهد بود و برعکس.

به طریق مشابه برای قطارهای جنوبی، محدودیتهای معادل با هریک از متغیرهای θ^0_{ijb}، α^0_{ijb}، β^0_{ib} و γ^0_{ib} تعریف می‌شوند.

به منظور بررسی کفایت تعداد خطوط پهلوگیری در یک ایستگاه برای توقف قطار در آن ایستگاه، بایستی شرایط مختلف را در نظر گرفت. هدف دسته‌محدودیتهای ظرفیت ایستگاه آن است که وضعیت خطوط پهلوگیری را در لحظه ورود قطار i به ایستگاه انتهای بلاک b تشخیص دهد. به این منظور بایستی موقعیت قطار i نسبت به تمامی قطارهایی که قبل از این قطار به ایستگاه انتهایی بلاک b وارد شده‌اند (قطارهای j که $A_{ijb} = ۰$) بررسی شود. به طور کلی دو سناریو در ارتباط با نحوه تلاقی دو قطار شمالی i و j وجود دارد:

سناریوی اول:

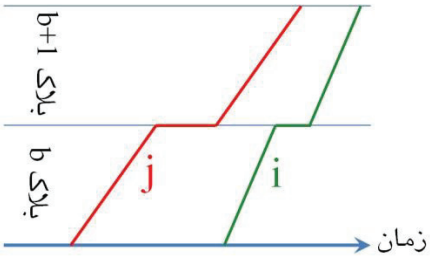
قطار شمالی j (قطار اول) زودتر از قطار شمالی i(قطار دوم) وارد بلاک b شود ($A_{ijb} = ۰$) و نیز زمان شروع به حرکت قطار شمالی j (قطار اول) از ابتدای بلاک (b+۱) کوچک تر یا مساوی با زمان رسیدن قطار شمالی i (قطار دوم) به انتهای بلاک b باشد ($Y^1_{j,(b+1)} \le X^1_{i,b}$). به عبارت دیگر، قطار شمالی i (قطار دوم) بعد از اینکه قطار شمالی j (قطار اول) ایستگاه انتهای بلاک b را ترک کند به آن ایستگاه رسیده باشد. در این سناریو، متغیر دوتایی θ^1_{ijb} مقدار صفر می‌گیرد. به این معنا که لزوماً خطی از ایستگاه به علت تلاقی دو قطار i و j اشغال نمی‌شود. در این سناریو اهمیتی ندارد که قطار شمالی i (قطار دوم) عبوری باشد یا در ایستگاه توقف داشته باشد:

$$IF\ A_{ijb} = 0, Y^1_{j,(b+1)} \le X^1_{i,b} \rightarrow \theta^1_{jib} = 0$$
$$\forall i, j \in N, \forall b \in B^1_i$$

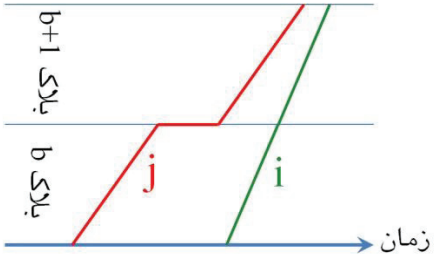
سناریوی دوم:

قطار شمالی j (قطار اول) زودتر از قطار شمالی i (قطار دوم) وارد بلاک b شود ($A_{ijb} = ۰$) و نیز قطار شمالی i (قطار دوم) قبل از اینکه قطار شمالی j (قطار اول) ایستگاه انتهای بلاک b را ترک کند به آن ایستگاه رسیده باشد ($Y^1_{j,(b+1)} \ge X^1_{i,b}$). در این سناریو، قطار دوم به دو حالت می‌تواند در ایستگاه عمل کند:

الف–قطار شمالی i (قطار دوم) در ایستگاه توقف نداشته باشد.



قطار دوم (i) در ایستگاه توقف داشته باشد: $\theta^1_{ijb} = 0$



قطار دوم (i) عبوری باشد: $\theta^1_{ijb} = 0$

شکل ۲. حالات تلاقی دو قطار شمالی i و j مربوط به سناریوی اول

در این حالت، خطی از خطوط پهلوگیری ایستگاه به علت تلاقی دو قطار i و j اشغال نمی‌شود. به عبارت دیگر θ^1_{ijb} برابر صفر می‌شود:

$$IF\ A_{ijb}=0\ ,Y^{\ 1}_{j,(b+1)}\geq X^{\ 1}_{i,b}\ ,X^{\ 1}_{i,b}=Y^{\ 1}_{i,(b+1)}\rightarrow\theta^1_{ijb}=0$$
$$\forall i,j\in N,\forall b\in B^1_i,i\neq j$$

با توجه به تعاریف قبلی، آشکار است که در این حالت، α^1_{ijb} و β^1_{ib} هردو به طور همزمان برابر با یک می‌شوند:

$$Y^{\ 1}_{j,(b+1)}\geq X^{\ 1}_{i,b}\ ,X^{\ 1}_{i,b}=Y^{\ 1}_{i,(b+1)}\equiv\begin{cases}\alpha^1_{ijb}=1\\ \beta^1_{ib}=1\end{cases}\qquad(۱۸)$$

ب- قطار شمالی i (قطار دوم) در ایستگاه توقف داشته باشد. در این حالت قطعاً خطی از خطوط پهلوگیری ایستگاه به علت تلاقی دو قطار i و j اشغال می‌گردد. به عبارت دیگر θ^1_{ijb} برابر یک می‌شود:

$$IF\ A_{ijb}=0\ ,Y^{\ 1}_{j,(b+1)}\geq X^{\ 1}_{i,b}\ ,X^{\ 1}_{i,b}<Y^{\ 1}_{i,(b+1)}\rightarrow\theta^1_{ijb}=1$$
$$\forall i,j\in N,\forall b\in B^1_i,i\neq j$$

با توجه به تعاریف قبلی، آشکار است که در این حالت، α^1_{ijb} و γ^1_{ib}، هردو به طور همزمان برابر با یک می‌شوند:

$$Y^{\ 1}_{j,(b+1)}\geq X^{\ 1}_{i,b}\ ,X^{\ 1}_{i,b}<Y^{\ 1}_{i,(b+1)}\equiv\begin{cases}\alpha^1_{ijb}=1\\ \gamma^1_{ib}=1\end{cases}\qquad(۱۹)$$

دقت شود که اشغال بودن یکی از خطوط ایستگاه انتهای بلاک b توسط یک قطار شمالی، لزوماً به معنای آن نیست که θ^1_{ijb} برابر با یک باشد. بلکه موقعیت دو قطار i و j نسبت به یکدیگر، مقدار θ^1_{ijb} را تعیین میکند. با استفاده از محدودیتهای (۲۰) تا (۲۵)، روابط (۱۸) و (۱۹) مدل‌سازی می‌شوند:

$$\left(A_{ijb}+\theta^1_{ijb}\right)\leq\alpha^1_{ijb}\qquad(۲۰)$$
$$\forall i,j\in N,\forall b\in B^1_i-\{bd_i\},i\neq j$$

$$\left(A_{ijb}+\theta^1_{ijb}\right)\leq(\beta^1_{ib}+\gamma^1_{ib})\qquad(۲۱)$$
$$\forall i,j\in N,\forall b\in B^1_i-\{bd_i\},i\neq j$$

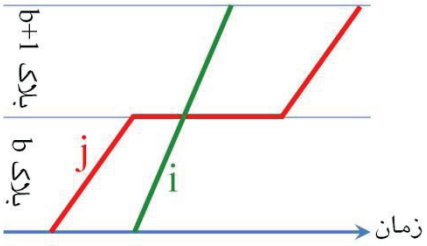
$$\left(A_{ijb}+\theta^1_{ijb}\right)\geq\alpha^1_{ijb}+(\beta^1_{ib}+\gamma^1_{ib})-1\qquad(۲۲)$$
$$\forall i,j\in N,\forall b\in B^1_i-\{bd_i\},i\neq j$$

$$\theta^1_{ijb}\leq\gamma^1_{ib}\qquad(۲۳)$$
$$\forall i,j\in N,\forall b\in B^1_i-\{bd_i\},i\neq j$$

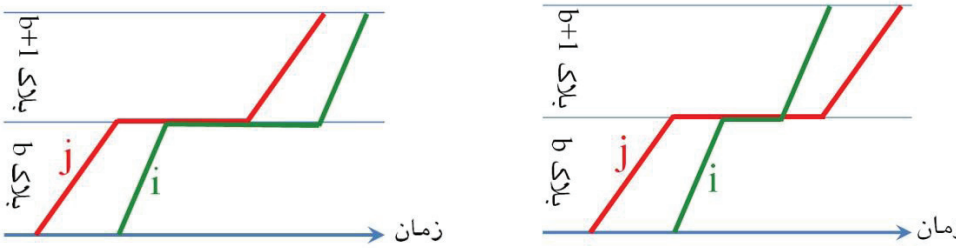
$$A_{ijb}+\theta^1_{ijb}\leq1\qquad(۲۴)$$
$$\forall i,j\in N,\forall b\in B^1_i-\{bd_i\},i\neq j$$

$$\beta^1_{ib}+\gamma^1_{ib}=1\qquad(۲۵)$$
$$\forall i\in N,\forall b\in B^1_i-\{bd_i\}$$

محدودیت نهایی ظرفیت خطوط پهلوگیری ایستگاه (ویژه



الف- قطار دوم (i) عبوری باشد: $\theta^1_{ijb}=0$



ب-قطار دوم (i) در ایستگاه انتهای بلاک b توقف داشته باشد: $\theta^1_{ijb}=1$

شکل ۳. حالات تلاقی دو قطار شمالی i و j مربوط به سناریوی دوم

قطارهای شمالی) عبارتست از:

$$Y^{1}_{i,(b+1)} \le X^{1}_{i,b} + M \times (NS^{1}_{b} - \sum_{j \in N} \theta^{1}_{ijb}) \qquad (۲۶)$$
$$\forall i, j \in N, \forall b \in B^{1}_{i} - \{bd_i\}$$

در این محدودیت، عبارت $(NS^{1}_{b} - \sum_{j \in N} \theta^{1}_{ijb})$ بیانگر تعداد خطوط پهلوگیری خالی در ایستگاه انتهای بلاک b در زمان ورود قطار i به ایستگاه است. با این شرایط، یکی از سه حالت ذیل همواره اتفاق خواهد افتاد:

۱) $(NS^{1}_{b} - \sum_{j \in N} \theta^{1}_{ijb}) > 0$ در این صورت محدودیت فوق غیرفعال می‌شود. از این رو با ورود قطار i به ایستگاه واقع در انتهای بلاک b خط خالی جهت توقف قطار i موجود خواهدبود.

۲) $(NS^{1}_{b} - \sum_{j \in N} \theta^{1}_{ijb}) = 0$ در این صورت قطار i بایستی از ایستگاه واقع در انتهای بلاک b بدون توقف عبور کند. به عبارت دیگر، در این حالت خواهیم داشت: $Y^{1}_{i,(b+1)} \le X^{1}_{i,b}$.

۳) $(NS^{1}_{b} - \sum_{j \in N} \theta^{1}_{ijb}) < 0$ که بیانگر شرایط نشدنی است.

محدودیتهای ظرفیت ایستگاه مربوط به قطارهای جنوبی، عیناً مشابه با محدودیتهای مربوط به قطارهای شمالی است؛ با این تفاوت که به جای اندیس ۱ در متغیرها (مربوط به قطارهای شمالی)، اندیس صفر قرار داده می‌شود. به عنوان مثال به جای θ^{1}_{ijb} داریم: θ^{0}_{ijb} . همچنین بجای A_{ijb} داریم: B_{ijb}.

۳-۵ محدودیتهای ثانویه: اقامه نماز

محدودیتهای اقامه نماز تنها بایستی برای قطارهای مسافری موجود در مسیر ریلی بکار گرفته شوند.

در راه‌آهن ایران، بر خلاف سایر راه‌آهنهای دنیا، توقف قطارهای مسافری برای اقامه نماز در زمان بعد از اذان، الزامی است. بر این اساس رانندگان قطار می‌بایست در فاصله زمانی بین اذان تا زمان قضا شدن نماز، قطار را در مکان مناسبی برای اقامه نماز متوقف کنند. دسته محدودیتهای توسعه‌داده‌شده در این بخش، سه مسئله را برای هریک از قطارهای مسافری بررسی می‌کنند:

الف) بررسی این که هر قطار در طول مدت سفر خود، اصلاً به بازه زمانی اقامه نماز (فاصله زمانی بین اذان تا زمان قضا شدن نماز) برمی‌خورد یا خیر.

ب) در صورتی که زمان سفر قطار با بازه زمانی اقامه نماز تلاقی دارد، بایستی بررسی شود که آیا قطار ناگزیر در ایستگاههای بین راهی باید برای نماز توقف داشته باشد یا این که زمانهای اذان، حرکت از مبدأ و رسیدن به مقصد، به نحوی هستند که امکان اقامه نماز در ایستگاههای مبدأ و یا مقصد نیز وجود دارد.

پ) در صورتی که قطار ناگزیر به توقف برای نماز در یکی از ایستگاههای بین راهی است، کدام ایستگاه جهت توقف بایستی انتخاب شود؟

در این بخش، تنها محدودیتهای اقامه نماز مربوط به قطارهای مسافری شمالی ذکر می‌شوند. در ادامه، سه مسئله فوق‌الذکر مورد بررسی قرار می‌گیرند:

الف) دسته محدودیتها برای بررسی این که قطار مسافری شمالی i در طول مدت سفر خود، اصلاً به بازه زمانی اقامه نماز (فاصله زمانی بین اذان تا زمان قضا شدن نماز) برمی‌خورد یا خیر.

$$X^{1}_{i,b} < EP_{b,m} + M \times ZE^{1}_{i,b,m} \qquad (۲۷)$$
$$\forall i \in NP, \forall b \in BP, \forall m \in M$$

$$X^{1}_{i,b} \ge EP_{b,m} - M \times \left(1 - ZE^{1}_{i,b,m}\right) \qquad (۲۸)$$
$$\forall i \in NP, \forall b \in BP, \forall m \in M$$

دسته محدودیتهای (۲۷) و (۲۸) تضمین می‌کنند: در صورتی که قطار شمالی i بعد از ابتدای نماز نوبت m به ایستگاه انتهای بلاک b برسد، متغیر $ZE^{1}_{i,b,m}$ مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

$$X^{1}_{i,b} \le LP_{b,m} + M \times \left(1 - ZL^{1}_{i,b,m}\right) \qquad (۲۹)$$
$$\forall i \in NP, \forall b \in BP, \forall m \in M$$

$$X^{1}_{i,b} > LP_{b,m} - \left(M \times ZL^{1}_{i,b,m}\right) \qquad (۳۰)$$
$$\forall i \in NP, \forall b \in BP, \forall m \in M$$

دسته محدودیتهای (۲۹) و (۳۰) تضمین می‌کنند: در صورتی که قطار شمالی i قبل از انتهای فرصت ادای نماز نوبت m به ایستگاه انتهای بلاک b برسد، متغیر $ZL^{1}_{i,b,m}$ مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

$$Z^{1}_{i,b,m} \le ZE^{1}_{i,b,m} \qquad (۳۱)$$
$$\forall i \in NP, \forall b \in BP, \forall m \in M$$

$$Z^1_{i,b,m} \le ZL^1_{i,b,m} \quad (۳۲)$$
$$\forall i \in NP, \forall b \in BP, \forall m \in M$$

$$Z^1_{i,b,m} \ge ZE^1_{i,b,m} + ZL^1_{i,b,m} - 1 \quad (۳۳)$$
$$\forall i \in NP, \forall b \in BP, \forall m \in M$$

دسته محدودیتهای (۳۱) تا (۳۳) تضمین می‌کنند: در صورتی که زمان رسیدن قطار شمالی i به ایستگاه انتهای بلاک b ($X^1_{i,b}$) در بازه زمانی یی قرار گرفته باشد که بتواند برای نماز نوبت m توقف کند (یعنی $ZE^1_{i,b,m} < X^1_{i,b} < ZL^1_{i,b,m}$) ، آن گاه متغیر $Z^1_{i,b,m}$ مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

ب) دسته محدودیت برای بررسی این که آیا قطار مسافری شمالی i بایستی ناگزیر در ایستگاههای بین راهی برای نماز توقف داشته باشد یا این که با توجه به زمان‌های خروج از مبدأ و ورود به مقصد، نیاز به توقف اجباری قطار مسافری شمالی i برای ادای نماز نوبت m در ایستگاههای بین راهی وجود ندارد.

$$Y^1_{i,bo_i} < \left(EP_{bo_i,m} + PO_m\right) + M \times \left(1 - \delta O^1_{i,m}\right) \quad (۳۴)$$
$$\forall i \in NP, \forall m \in M$$

$$Y^1_{i,bo_i} \ge \left(EP_{bo_i,m} + PO_m\right) - M \times \delta O^1_{i,m} \quad (۳۵)$$
$$\forall i \in NP, \forall m \in M$$

دسته محدودیتهای (۳۴) و (۳۵) تضمین می‌کنند: در صورتی که زمان خروج قطار شمالی i از مبدأ خود (Y^1_{i,bo_i}) به گونه‌ای باشد که مسافران فرصت کافی برای ادای نماز نوبت m را در ایستگاه مبدأ نداشته باشند، متغیر $\delta O^1_{i,m}$ مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

$$X^1_{i,bd_i} < \left(LP_{bd_i,m} - PD_m\right) + M \times \delta D^1_{i,m} \quad (۳۶)$$
$$\forall i \in NP, \forall m \in M$$

$$X^1_{i,bd_i} \ge \left(LP_{bd_i,m} - PD_m\right) - M \times \left(1 - \delta D^1_{i,m}\right) \quad (۳۷)$$
$$\forall i \in NP, \forall m \in M$$

دسته محدودیتهای (۳۶) و (۳۷) تضمین می‌کنند: در صورتی که زمان ورود قطار شمالی i به مقصد خود (X^1_{i,bd_i}) به گونه‌ای باشد که مسافران فرصت کافی برای ادای نماز نوبت m را در ایستگاه مقصد نداشته‌باشند، متغیر $\delta D^1_{i,m}$ مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

$$\delta^1_{i,m} \le \delta O^1_{i,m} \quad \forall i \in NP, \forall m \in M \quad (۳۸)$$

$$\delta^1_{i,m} \le \delta D^1_{i,m} \quad \forall i \in NP, \forall m \in M \quad (۳۹)$$

$$\delta^1_{i,m} \ge \delta O^1_{i,m} + \delta D^1_{i,m} - 1 \quad \forall i \in NP, \forall m \in M \quad (۴۰)$$

دسته محدودیتهای (۳۸) تا (۴۰) تضمین می‌کنند: در صورتی که مقدار هر دو متغیر $\delta O^1_{i,m}$ و $\delta D^1_{i,m}$ برابر با یک باشد، آن‌گاه مقدار متغیر $\delta^1_{i,m}$ نیز برابر با یک خواهدبود و در غیر این صورت $\delta^1_{i,m}$ مقدار صفر می‌گیرد.

پ) دسته محدودیت برای تعیین ایستگاه توقف برای نماز از بین ایستگاه‌هایی که قطار مسافری شمالی i می‌تواند در آنها (به مدت زمان) توقف کند.

$$\mu_{i,b,m} \le Z_{i,b,m} \quad \forall i \in NP, \forall b \in BP, \forall m \in M \quad (۴۱)$$

مطابق تعریف، اگر ایستگاه بین راهی انتهای بلاک b برای توقف قطار شمالی i برای ادای نماز نوبت m انتخاب شود، متغیر $\mu^1_{i,b,m}$ مقدار یک می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد. دسته محدودیت (۴۱) تضمین می‌کند: ایستگاه توقف جهت نماز، حتماً جزو ایستگاههایی باشد که قطار شمالی i در بازه نماز وعده m به آن می‌رسد.

$$\sum_{b \in BP - \{bd_i\}} \mu_{i,b,m} = \delta_{i,m} \quad \forall i \in NP, \forall m \in M \quad (۴۲)$$

دسته محدودیت (۴۲) تضمین می‌کند: در حالتی که $\delta_{i,m}$ برابر صفر است، هیچ ایستگاهی برای توقف نماز انتخاب نشود و هنگامی که $\delta_{i,m}$ برابر یک است، یک و تنها یک ایستگاه از بین ایستگاههای مجاز ، جهت توقف نماز انتخاب شود.

محدودیت نهایی اقامه نماز (ویژه قطارهای مسافری شمالی) عبارتست از:

$$Y^1_{i,(b+1)} - X^1_{i,b} \ge TP_m \times \mu_{i,b,m} \quad (۴۳)$$
$$\forall i \in NP, \forall b \in BP, \forall m \in M$$

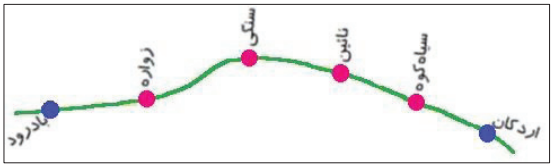
دسته محدودیت (۴۳) تضمین می‌کند: در صورتی که متغیر $\mu_{i,b,m}$ مقدار یک گرفته باشد، قطار i جهت نوبت نماز m بایستی به مدت حداقل TP_m دقیقه در ایستگاه انتهایی بلاک b توقف کند.

محدودیتهای اقامه نماز مربوط به قطارهای مسافری جنوبی، عیناً مشابه با محدودیتهای مربوط به قطارهای مسافری شمالی هستند؛

با این تفاوت که به جای اندیس ۱ در متغیرها، اندیس صفر قرار داده می‌شود.

٤. مطالعه موردی: مسیر ریلی بادرود–اردکان

برای پیاده‌سازی مدل پیشنهادی از نرم‌افزار Lingo۱۱ استفاده شده است. به منظور ارزیابی و کاربست مدل برنامه ریزی ریاضی، مسیر ریلی بادرود – اردکان استفاده شده است. مسیر بادرود – اردکان یکی از مسیرهای مهم شبکه ریلی کشور است که دارای طول ۲٤۰ کیلومتر است. در حال حاضر بخش قابل توجهی از حمل و نقل مسافر و بار جذب‌شده به سیستم ریلی، از طریق این مسیر تک‌خطه انجام می‌شود. به دلیل ظرفیت پائین، این مسیر به عنوان یکی از گلوگاههای ریلی کشور محسوب می‌شود و به همین دلیل، برنامه ریزی حرکت قطارها برای این مسیر گلوگاهی، با توجه به کلیه محدودیتهای موجود در مسیرهای ریلی ایران، از اهمیت بسیاری برخوردار است.



شکل ٤. مسیر ریلی بادرود– اردکان

در جدول شماره ۲، ایستگاههای موجود واقع در این مسیر و فاصله آنها از یکدیگر نمایش داده شده‌است.

جدول ۲. ایستگاههای موجود در مسیر ریلی بادرود–اردکان

ردیف	نام ایستگاه	فاصله تا ایستگاه تهران (km)	فاصله تا ایستگاه قبلی (km)
۱	بادرود	۳٤۲	--
۲	زواره	۳۹۳	۵۱
۳	سنگی	٤٤۰	٤۷
٤	نایین	٤۹۰	۵۰
۵	سیاه کوه	۵٤۰	۵۰
٦	اردکان	۵۸۲	٤۲

در حال حاضر، قطارهای مختلف مسافری و باری از این مسیر استفاده می‌کنند. ایستگاههای بین راهی شامل زواره، سنگی، نائین و سیاه کوه، ایستگاههای ساده غیر تشکیلاتی هستند و هیچ یک به عنوان مبدأ و یا مقصد قطارهای عبوری از مسیر نیستند. هریک از این ایستگاهها در حال حاضر دارای دو خط پهلوگیری هستند که یکی از این خطوط پهلوگیری، جهت توقف قطارهای رونده به سمت اردکان (قطارهای مسیر رفت) و دیگری برای توقف قطارهای رونده به سمت بادرود (قطارهای مسیر برگشت) مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به محدودیتهای ثانویه مدل ریاضی، سه مثال بررسی شده‌اند که در ادامه تشریح می‌شوند.

مثال ۱: در این مثال، در مسیر تک‌خطه ریلی بادرود – اردکان، تعداد ۸ قطار در مسیر رفت (از بادرود به اردکان با شماره های ۱ تا ۸) و تعداد ۸ قطار در مسیر برگشت (از اردکان به بادرود با شماره های ۹ تا ١٦) حرکت می‌کنند. قطارهای مسافری شامل قطارهای شماره ۲، ٤، ۵ و ٦ در مسیر رفت و قطارهای ۱۰، ۱۲، ۱۳ و ١٤ در مسیر برگشت هستند. سایر قطارها باری هستند. اولویت هر قطار مسافری ۲ برابر قطار باری است. مبدأ و مقصد همه قطارهای رفت، به ترتیب بادرود و اردکان هستند. همچنین مبدأ و مقصد همه قطارهای برگشت به ترتیب بادرود و اردکان هستند. واحد زمانی بر اساس دقیقه بوده و دوره زمانبندی مورد تحلیل، ۱۰ ساعت (٦۰۰ دقیقه) است. بنابر این فقط یک وعده نماز مورد بررسی قرار گرفته‌است. بازه زمانی مجاز برای ادای نماز در همه ایستگاهها از دقیقه ۳۰۰ تا دقیقه ٤۵۰ است و همه ایستگاه‌های میانی دارای نمازخانه هستند. حداقل زمان سیر هریک از بلاکها توسط هر قطار مسافری به ترتیب برابر با ۲۰ و ٤۰ دقیقه و حداکثر زمان سیر بلاک توسط هر قطار مسافری به ترتیب برابر با ۳۵ و ۵۵ دقیقه است. زودترین و دیرترین زمان مجاز جهت خروج از مبدأ قطارها در جدول شماره ۳ ذکر شده است.

برای قطارهای شمالی و جنوبی PO_m، PD_m و TP_m به ترتیب برابر با ٦۰، ٦۰ و ۳۰ دقیقه در نظر گرفته می‌شوند. حداکثر توقف مجاز در ایستگاه بین راهی برای قطارهای مسافری ۳۰ دقیقه و برای قطارهای باری ۱۰۰ دقیقه است. در این مثال، تعداد خطوط

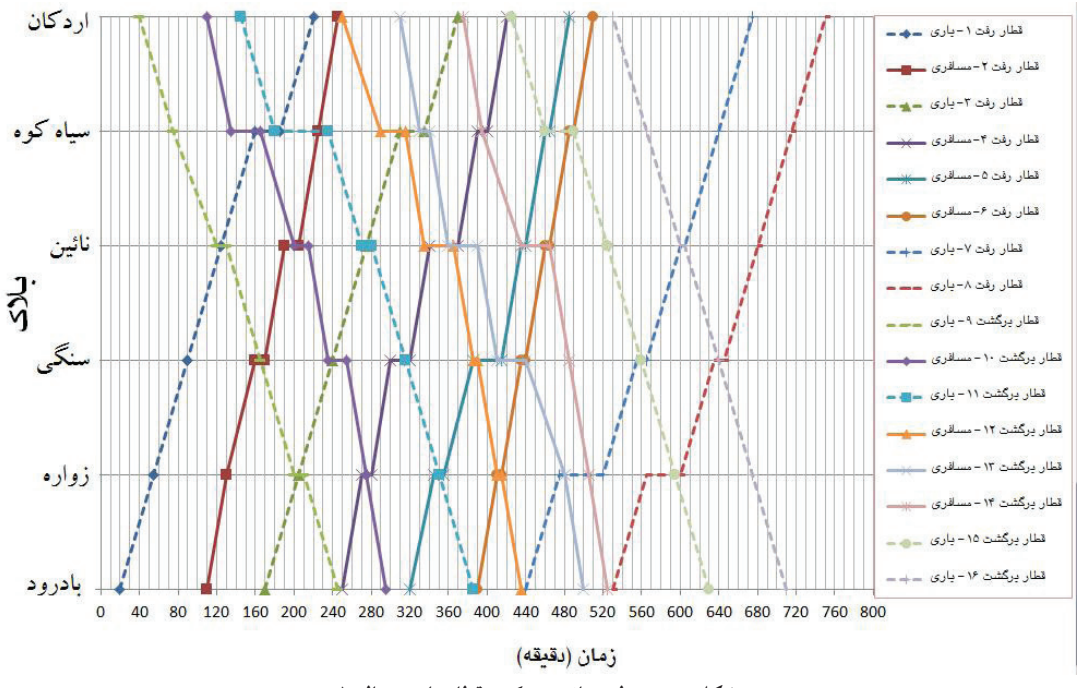
جدول ۳. زمان مجاز خروج از مبدأ قطارها

قطار	زودترین زمان مجاز	دیرترین زمان مجاز
«قطار رفت ۱- باری» و «قطار برگشت ۹- باری»	۲۰	۴۰
«قطار رفت ۲- مسافری»/ «قطار برگشت ۱۰- مسافری»	۷۵	۱۱۰
«قطار رفت ۳- باری»/ «قطار برگشت ۱۱- باری»	۱۴۵	۱۸۰
«قطار رفت ۴- مسافری»/ «قطار برگشت ۱۲- مسافری»	۲۱۵	۲۵۰
«قطار رفت ۵- مسافری»/ «قطار برگشت ۱۳- مسافری»	۲۸۵	۳۲۰
«قطار رفت ۶- مسافری»/ «قطار برگشت ۱۴- مسافری»	۳۵۵	۳۹۰
«قطار رفت ۷- باری»/ «قطار برگشت ۱۵- باری»	۴۲۵	۴۶۰
«قطار رفت ۸- باری»/ «قطار برگشت ۱۶- باری»	۴۹۵	۵۳۰

پهلوگیری مربوط به هریک از مسیرهای رفت و برگشت، برابر با ۲ خط منظور شده‌است.

پس از حل مسئله توسط نرم‌افزار لینگو، زمانهای ورود و خروج بهینه هر قطار از ایستگاه‌ای مختلف مشخص شدند. مقدار تابع هدف در این حالت برابر با ٤٢٨٥ دقیقه و تعداد محدودیتها برابر با ٦٢٨٩ است. شکل شماره ۵ گراف حرکت قطارها را نمایش می‌دهد. لازم به ذکر است که در این شکل، خطوط نقطه چین، مربوط به قطارهای باری و خطوط ممتد مربوط به قطارهای مسافری هستند.

در این مثال، مشخص شده است که چهار قطار مسافری به دلیل برخورد به بازه نماز (دقیقه ۳۰۰ تا ٤٥٠) و نبودن فرصت کافی برای اقامه نماز در مبدأ و مقصد حرکت، ناگزیر به توقف در ایستگاههای بین راهی به مدت ۳۰ دقیقه هستند (قطار رفت ٤ در ایستگاه نائین، قطار رفت ۵ در ایستگاه سنگی، قطارهای برگشت ۱۲ و ۱۳ در ایستگاه نائین). سایر توقفهای بین راهی، به دلیل محدودیتهای سیر و حرکت است که برنامه این توقفها را به صورت بهینه در زمان سیر قطارها تنظیم کرده است. ملاحظه می‌شود که قطارهای برگشت ۱۲ و ۱۳ مجبور به توقف همزمان



شکل ۵. جدول زمانی حرکت قطارها در مثال ۱

در خطوط پهلوگیری مربوط به مسیر برگشت در ایستگاه نائین هستند. به دلیل اینکه در ورودی مسئله، ظرفیت خطوط پهلوگیری ایستگاهها در هر طرف برابر با ۲ منظور شده‌است، مدل ریاضی امکان حضور همزمان قطارهای ۱۲ و ۱۳ در ایستگاه نائین را فراهم کرده‌است. در حالی که در کلیه ایستگاههای بین راهی مسیر بادرود- اردکان، تعداد خطوط پهلوگیری مربوط به هریک از مسیرهای رفت و برگشت، برابر با ۱ خط است. این مشکل در مثال ۲ برطرف شده است.

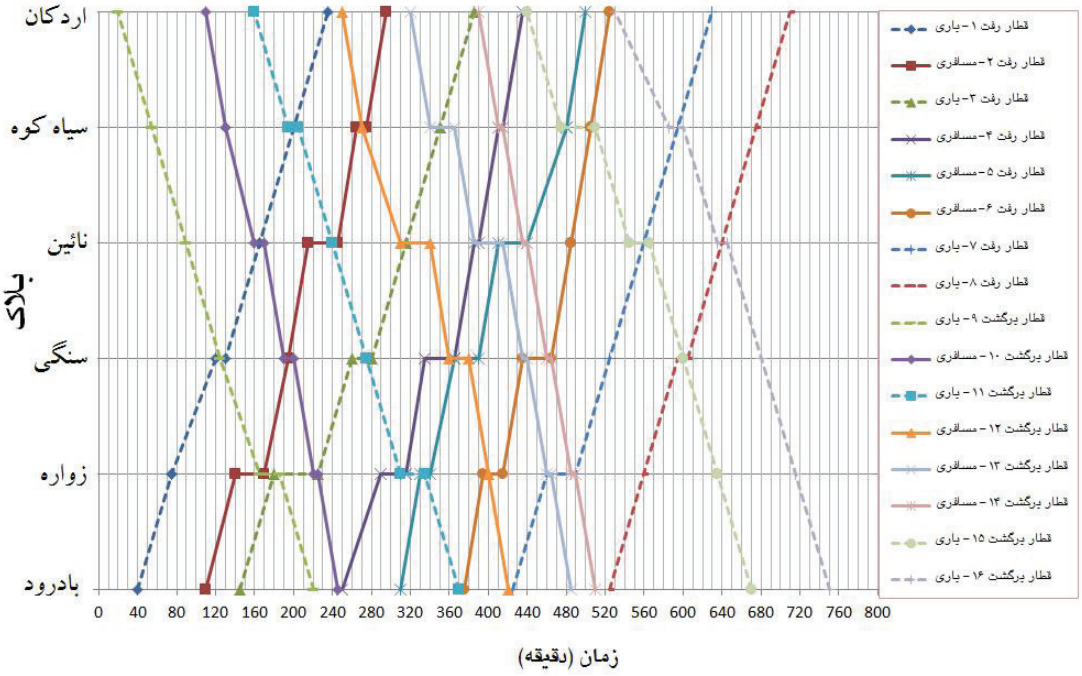
مثال۲: کلیه اطلاعات موردنیاز در این مثال، مشابه اطلاعات مربوط به مثال قبلی هستند. با این تفاوت که تعداد خطوط پهلوگیری مربوط به هریک از مسیرهای رفت و برگشت، به جای ۲ خط، برابر با ۱ خط منظور شده‌است. نتایج در شکل شماره ٦ نمایش داده شده‌است.

همان گونه که در شکل شماره ٦ ملاحظه می‌شود در این مثال، برخلاف مثال ۱ حداکثر یک قطار رفت (برگشت) امکان توقف در خطوط پهلوگیری رفت (برگشت) هریک از ایستگاهها را دارد. وجود محدودیت ظرفیت ایستگاه باعث شده که هیچ دو قطاری با یکدیگر توقف همزمان در ایستگاهها نداشته باشند. همچنین در این مثال، مشخص شده است که چهار قطار مسافری، مجبور به توقف در ایستگاههای بین راهی به مدت ۳۰ دقیقه هستند (قطار رفت ٤ در ایستگاه سنگی، قطار رفت ۵ در ایستگاه نائین، قطارهای برگشت ۱۲ و ۱۳ در ایستگاه نائین). مقدار تابع هدف در این حالت برابر با ٤۲۸۵ دقیقه است.

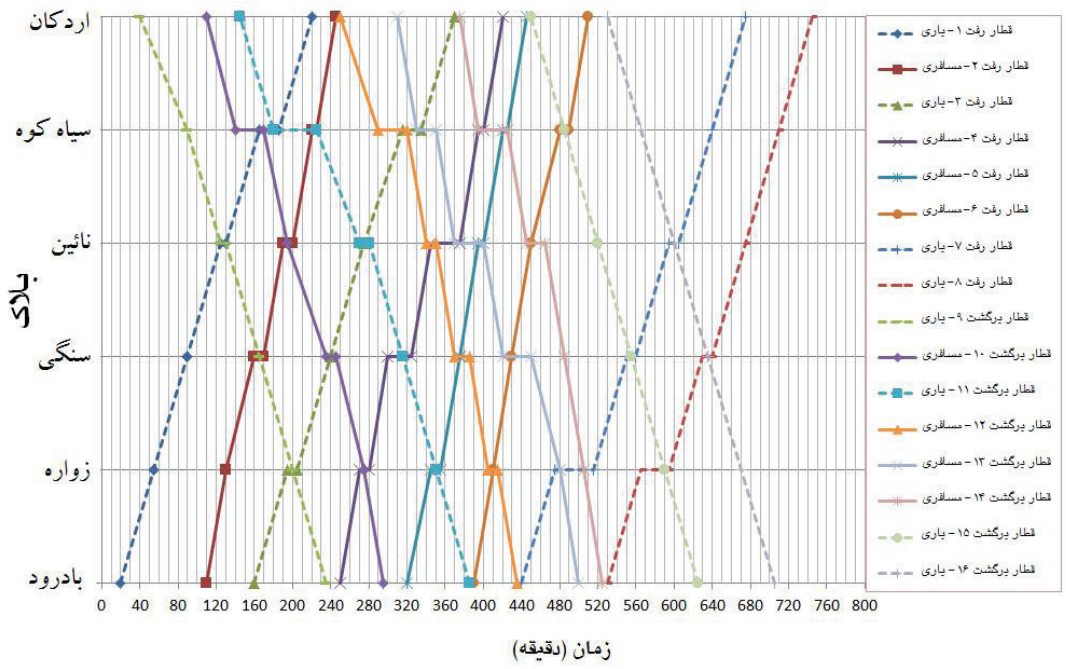
مثال ۳: کلیه اطلاعات موردنیاز در این مثال، مشابه با مثال ۲ هستند. با این تفاوت که محدودیتهای مربوط به نماز در این مثال حذف شده اند. نتایج در شکل شماره ۷ نمایش داده شده‌است. مقدار تابع هدف در این حالت برابر با ٤۱٦۵ دقیقه است. در این مثال، هیچ یک از توقفهای مربوط به قطارهای مسافری، برای اقامه نماز نیست. همچنین در هر طرف از خطوط پهلوگیری ایستگاهها، تنها یک قطار امکان توقف دارد.

۵. جمع بندی و نتیجه گیری

در این پژوهش، مدلی برای زمانبندی حرکت قطارهای مسافری و باری در مسیرهای تک‌خطه ریلی ارایه شده‌است که با محدودیتهای خاص مربوط به مسیرهای ریلی ایران تناسب دارد. یکی از نوآوریهای مدل، در نظر گرفتن دسته محدودیتهایی برای



شکل ٦. جدول زمانی حرکت قطارها در مثال ۲



شکل ۷. جدول زمانی حرکت قطارها در مثال ۳

بررسی کفایت خطوط پهلوگیری در ایستگاههای ریلی است. این مسئله از آنجایی که بسیاری از ایستگاههای ریلی کشور (به دلیل هزینه زیاد احداث خطوط پهلوگیری) دارای محدودیت ظرفیت هستند حائز اهمیت است. همچنین توقف اجباری قطارهای مسافری برای ادای فریضه نماز، یکی از الزامات شبکه ریلی ایران است که در مدل ارایه‌شده مدنظر قرار گرفته است. به منظور ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی، سه مسئله آزمایشی توسط نرم‌افزار لینگو حل شده‌است. در این مسائل نشان داده شده‌است که چگونه شرایط متفاوت مسئله، منجر به تغییر در زمانهای ورود و خروج و توقف قطارها می‌شود.

برای انجام مطالعات بعدی، پیشنهاد می‌شود مدل مذکور که مربوط به مسیرهای تک‌خطه است، برای شبکه‌های ریلی توسعه داده شود. همچنین برخی دیگر از محدودیتهای ویژه سیستم ریلی کشور از جمله محدودیت مسدودی خط مورد توجه قرار گیرد. به منظور حل مسائل با ابعاد بزرگ نیز، از روشهای حل مبتنی بر الگوریتمهای فراابتکاری استفاده گردد.

٦. پی نوشتها

1- Single-Track Corridors
2- Siding Track
3- Primary Limits
4- Secondary Limits
5- Passenger Trains
6- Cargo Trains

۷. مراجع

– شفاهی، یوسف و صادقی، نازنین "کاربرد یک مدل شبیه سازی برای تعیین اثر سیاستهای عملیاتی مختلف بر روی قابلیت اطمینان برنامه زمانبندی حرکت قطارها"، اولین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه شریف، ۱۳۸۳.

– یقینی، مسعود و انجمن علمی دانشکده مهندسی راه آهن (ترجمه) (۱۳۸۹) "زمانبندی و سیر و حرکت در راه آهن"،تهران: انتشارات پیشرو فناوری قائد.

– جمیلی، امین و کیانفر، فریدون(۱۳۸۸) "زمانبندی حرکت قطارها به کمک روش فوق ابتکاری عملیات حرارتی شبیه سازی شده"، پژوهشنامه حمل و نقل، سال ششم، شماره اول.

- خادم ثامنی، ..... (۱۳۸٦)"زمانبندی حرکت قطارها در مسیرهای دوخطه"، رساله کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس.

- یقینی، مسعود و محمدزاده، علی (۱۳۹۰) "یک مدل زمانبندی حرکت قطارها با در نظر گرفتن زمانهای توقف برای نماز"، نشریه تخصصی مهندسی صنایع، دوره ٤٥، شماره ۱ ، ص. ۱۰۳ – ۱۱٦.

- یقینی، مسعود و لسان، جواد (۱۳۸۹) "برنامه ریزی عملیات حمل و نقل ریلی"، ایران: انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران.

- D'Ariano, A., Pacciarelli, D., and Pranzo, M. (2007) "A branch and bound algorithm for scheduling trains in a railway network". European Journal of Operational Research, 183 (2), pp.643–657.

- Burdett, R. L. and Kozan, E. (2010) "A disjunctive graph model and framework for constructing new train schedules", European Journal of Operational Research, Vol. 200, pp.85-98.

- Cacchiani, V, Caprara, A. and Toth, P. (2008) "A column generation approach to train timetabling on a corridor," OR, Vol. 6, No. 2, pp. 125–142.

- Caprara, A., Monaci, M., Toth, P. and Guida, P. L. (2006) "A Lagrangian heuristic algorithm for a real-world train timetabling problem," Discrete Appl. Math., vol. 154, no. 5, pp. 738–753.

- Corman, F., D'Ariano, A., Pacciarelli, D. and Pranzo, M. (2009) "A tabu search algorithm for rerouting trains during rail operations", Transportation Research Part B, 44 (1), pp.175–192.

- Ghoseiri, K., Szidarovzky, F. and Asgharpour, M. J. (2004) "A multi-objective train scheduling: model and solution", Journal of Transportation Research, Part B.

- Higgins, A., Kozan, E. and Ferreira, L. (1996) "Optimal scheduling of trains on a single line track", Transportation Research Part B: Methodological, Vol.30, PP. 147-161.

- Mu, Shi and Dessouky, Maged (2011) "Scheduling freight trains traveling on complex networks", Transportation Research Part B 45, pp.1103–1123.

- Sahin, I. (1999) "Railway traffic control and train scheduling based on inter-train conflict management", Transportation Research Part B 33, pp.511-534

- Szpigel, B. (1973) "Optimal train scheduling on a single track railway", Operational Research 72, M. Ross (ed.), North-Holland, Amsterdam, pp. 343-352.

- Tornquist, J. and Persson, J. A.(2007) "N-tracked railway traffic re-scheduling during disturbances", Transportation Research Part B, Volume 41, Issue 3, pp.342–362

- Zhou, X. and Zhong, M. (2005) "Bicriteria train scheduling for high-speed passenger railroad planning applications", European Journal of Operational Research, Vol. 167, No. 3, pp. 752–771.