زمانبندی حرکت قطارها با هدف بهره‌برداری بهینه از مسیرهای ریلی دوخطه

عرفان حسن نایبی (مسئول مکاتبات)، دانشجوی دکتری، دانشکده فنی- مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

فریدون کیانفر، استاد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

آرمان ساجدی نژاد، دانش آموخته دکتری، دانشکده فنی - مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

Email :e.hassannayebi@modares.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۲/۰۶/۰۲ پذیرش:۱۳۹۲/۰۹/۱۹

چکیده:

در این تحقیق، مسئله زمانبندی حرکت قطارها در مسیرهای دو خطه ریلی با هدف کمینه‌سازی زمان بیکاری بلاک‌ها و بهره‌برداری بهینه از خطوط ریلی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این مسئله یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح ارائه شده است. جهت بهره‌برداری بهینه از ظرفیت زیرساخت ریلی موجود، قطارها می بایست با حفظ شرایط عملیاتی، تا حدامکان در فشرده ترین حالت زمانبندی شوند تا طول زمان اشغال مسیر ریلی کمینه شود. متغیرهای تصمیم مسئله شامل توالی اعزام قطارها از ایستگاه مبدا، سرفاصله زمانی بین اعزام قطارهای متوالی، تخصیص قطارها به خطوط ایستگاهها و تعیین برنامه توقف قطارها برای اقامه نماز است. قطارها از ایستگاه مبدا در یک جهت به سمت ایستگاه مقصد مشترک، اعزام شده و به دلایل متفاوتی مانند مسافرگیری، آبگیری، اقامه نماز و غیره، در ایستگاههای بین راه توقف دارند. در مدل پیشنهادی، امکان سبقت گرفتن قطارها از یکدیگر به دلیل جلوگیری از انتشار تاخیرات، وجود ندارد. برنامه توقف قطارها برای مواردی مانند مسافرگیری، بارگیری و سوختگیری، از قبل مشخص و ثابت بوده ، اما برنامه توقف قطارها جهت اقامه نماز، متغیر تصمیم مسئله است. محدودیت ظرفیت ایستگاه شامل تعداد خطوط و سکوها در تعیین ظرفیت محور، در نظر گرفته شده است. برای کاهش زمان حل مدل برنامه‌ریزی عددصحیح، چندین دسته نامساوی معتبر ارائه شده است. عملکرد مدل برنامه‌ریزی عددصحیح روی تعدادی نمونه مسئله تصادفی با ابعاد کوچک، متوسط، بزرگ و همچنین برای مسیرهای دوخطه تهران-گرمسار و تهران-محمدیه به عنوان مطالعه موردی، بررسی شده است. نتایج نشان دهنده کارائی نامساویهای معتبر ارائه شده در کاهش زمان دقیق حل مسائل با ابعاد کوچک و متوسط، توسط نرم افزار CPLEX است. همچنین در صورتی که توالی اعزام قطارها مشخص باشد، نرم افزار CPLEX قادر به حل مسائل با ابعاد بزرگ در زمان پذیرفتنی است.

واژه‌های کلیدی : زمانبندی حرکت قطارها، توالی اعزام، مسیر دوخطه، نامساوی معتبر

۱. مقدمه

صنعت ریلی یکی از صنایع مهم حمل‌ونقل با هزینه سرمایه گذاری بالا در تجهیزات و نیروی انسانی است. در این صنعت، برنامه‌ریزی و زمانبندی حرکت صدها قطار در شبکه ریلی مسئله‌ای بسیار پیچیده بوده و بهبود اندکی در هزینه‌های عملیاتی سیستم حمل‌ونقل می‌تواند بهبود قابل ملاحظه‌ای در بازگشت سرمایه داشته باشد. به طورکلی فرآیندهای برنامه‌ریزی حمل‌ونقل ریلی را می‌توان در شکل ۱. گام های برنامه‌ریزی در راه‌آهن، خلاصه کرد. در فاز تخمین تقاضا، حجم تقاضای سفر بین نقاط مبدا و مقصد، تعیین شده و تعداد قطار و واگن مورد نیاز برای مدیریت این حجم از تقاضا برآورد می‌شود. در گام برنامه‌ریزی خطوط ریلی، هدف تعیین مسیر حرکت و تعداد دفعات اعزام هر قطار از مبدا است. در گام زمانبندی حرکت قطارها که در این تحقیق به آن می پردازیم، هدف، تعیین یک برنامه کامل زمانبندی با جزئیات کامل شامل تعیین زمان حرکت هر قطار از مبدا، برنامه دقیق خروج از هر یک از ایستگاههای بین راه و تعیین مکان مناسب برای توقف اجباری قطارها در ایستگاهها است. در مرحله زمانبندی حرکت قطارها، تعیین توالی اعزام قطارها با هدف بهره‌برداری هر چه بیشتر از ظرفیت شبکه و یا با هدف کاهش تاخیرات برنامه‌ریزی نشده قطارها و کاهش انحراف از برنامه زمانبندی اولیه انجام می‌گیرد. در گام برنامه‌ریزی گردش لکوموتیو، هدف تخصیص بهینه واگنها به قطارها با هدف کاهش هزینه‌های گردش لکوموتیو و استفاده هرچه بیشتر از ظرفیت حمل مسافر و بار است. در گام آخر نیز برنامه اعزام خدمه قطار و تخصیص آنها به قطارها تعیین می‌شود.

تهیه برنامه کامل زمانبندی حرکت قطارها، یکی از مهم ترین و دشوارترین فعالیتها در شرکتهای راه‌آهن است. این دشواری به دلیل ابعاد بزرگ و رو به رشد مسائل واقعی و همچنین وجود محدودیتهای عملیاتی مختلف است. با افزایش تقاضای مسافران و توسعه خطوط ریلی، اهمیت مسئله زمانبندی و توالی اعزام قطارها در شبکه‌های ریلی، دوچندان شده است، چرا که علاوه بر افزایش دشواری برنامه‌ریزی سیستم‌های حمل‌ونقل ریلی، انتظارات مسافرین برای ارائه سطح خدمت مناسب تر، افزایش یافته است. از طرفی شرکتهای راه‌آهن، جهت بهره‌برداری هرچه بهتر از ظرفیت موجود، نیاز به دانستن حداکثر ظرفیت عملی حمل مسافر در شبکه ریلی برای برنامه‌ریزی بلند مدت دارند. ظرفیت خطوط ریلی وابسته به نوع, ترکیب قطارها و توالی اعزام آنها از ایستگاه مبدا، نوع زیرساختهای ریلی، حداکثر سرعت سیر قطارها در بلاکها و سایر شرایط عملیاتی است [Abril et al. 2008]. منظور از ظرفیت تئوری[1]، تعداد قطارهایی است که می‌توانند روی یک مسیر ریلی در یک زمان مشخص و با حداقل فاصله از هم، اعزام شوند [Krueger, 1999]. برای محاسبه حداکثر ظرفیت تئوری می بایست قطارها با بهترین ترتیب، حداکثر سرعت و حداقل فاصله با حفظ شرایط ایمنی و رعایت قوانین علائم، اعزام شوند. دراین حالت، هیچ زمان بافری برای جذب زمانهای تاخیر احتمالی وجود ندارد. این مقدار یک کران بالا برای مقدار ظرفیت خطوط ریلی است. از طرفی، منظور از ظرفیت عملی[2]، تعداد قطارهایی است که بتوانند با فاصله مناسب و حفظ شرایط عملیاتی در یک مدت زمان مشخص، اعزام شوند. آبریل و همکاران [Abril et al. 2008] پارامترهای موثر بر ظرفیت خطوط ریلی را به سه دسته پارامترهای زیرساختی، ترافیکی و عملیاتی تقسیم کرده‌اند. مهم ترین پارامترهای زیرساختی موثر بر ظرفیت خطوط ریلی شامل نوع بلاک‌بندی مسیر و سیستم علائم، نوع مسیر (تک خطه، دوخطه و چندخطه)، تاثیرات شبکه‌ای،

شکل ۱. گام های برنامه‌ریزی در راه‌آهن

زیرساخت خطوط ریلی و محدودیت‌های حداکثر سرعت قطارها و طول بلاک‌ها است.

مسئله مورد تحقیق با توجه به شرایط عملیاتی و ملاحظات راه‌آهن ایران مورد بررسی قرار گرفته است. در شبکه راه‌آهن ایران، قطارهای مسافری، ملزم به توقف در بازه‌های افق شرعی جهت اقامه نماز مسافران هستند. به دلیل طولانی بودن زمان سفر قطارها، تعداد توقف قطارها برای اقامه نماز مسافرین در طول یک بازه زمانی مانند یک روز، قابل ملاحظه بوده و درصد قابل توجهی از زمانهای توقف برنامه‌ای قطارها شامل زمانهای توقف جهت اقامه نماز است. همچنین با توجه به طول بازه افق شرعی، هر قطار امکان انتخاب چندین ایستگاه برای توقف در بازه‌های افق شرعی را دارد. از این رو، تعیین برنامه توقف قطارها تاثیر قابل ملاحظه‌ای روی بهره‌برداری مناسب از ظرفیت شبکه حمل‌ونقل ریلی دارد. در این تحقیق، تاثیر توالی اعزام قطارها، فاصله بین اعزام قطارها، نحوه ورود قطارها به خطوط ایستگاهها و برنامه توقف قطارها روی حداکثر ظرفیت عملی قابل بهره‌برداری از شبکه ریلی بررسی می‌شود. منظور از توالی اعزام قطارها از ایستگاه مبدا و برنامه توقف قطارها به ترتیب، تعیین ترتیب خروج قطارها از اولین ایستگاه و تعیین بهترین ایستگاه توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی است. فاصله بین اعزام قطارهای متوالی باید طوری تنظیم شود که علاوه بر عدم ایجاد توقف غیربرنامه‌ای و حفظ شرایط ایمنی، از ظرفیت شبکه نیز بیشترین استفاده گردد. برنامه توقف قطارها که شامل مکان و زمان توقف قطارها در ایستگاهها است، تاثیر قابل ملاحظه‌ای روی ظرفیت خطوط ریلی دارد. زمانهای توقف که می‌توانند بصورت برنامه‌ای و غیر برنامه‌ای باشند، باعث طولانی تر شدن زمان سفر قطارها می‌شوند. افزایش زمان سفر قطارها، باعث افزایش تعداد تلاقی‌های احتمالی بین قطارها و در نتیجه افزایش طول افق زمانبندی می‌شود. برای تحلیل ظرفیت شبکه حمل‌ونقل ریلی می‌توان از روش های تحلیل شبکه، مدل‌های شبیه‌سازی، مدل‌های تئوری صف، مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی و روش اتحادیه بین‌المللی راه‌آهن (استاندارد UIC[۳]) استفاده کرد. در این تحقیق، از مدل برنامه‌ریزی عددصحیح، برای تولید برنامه زمانبندی با هدف بیشترین بهره‌برداری از ظرفیت زیرساخت ریلی مسیر دوخطه، استفاده می‌شود. برنامه فوق یک برنامه زمانبندی است که بلاک‌ها و خطوط ایستگاهها دارای کمترین زمان بیکاری باشند و محدودیت‌های عملیاتی مهم از جمله حداقل سرفاصله زمانی بین قطارها جهت جلوگیری از بروز تاخیرات زنجیره‌ای، در آن رعایت شده باشد.

توابع هدف در مسائل زمانبندی حرکت قطارها از دیدگاه مسافرین و شرکتهای حمل‌ونقل ریلی، قابل دسته‌بندی است. معیارهای رضایت مسافرین قطار، شامل بموقع بودن زمان اعزام، کمینه شدن زمانهای تاخیر و توقف غیربرنامه‌ای قطارها و رسیدن به موقع به مقصد است. عمده توقفهای غیربرنامه‌ای قطارها نیز به دلیل محدودیت ظرفیت ایستگاهها و اشغال بودن خطوط ریلی توسط سایر قطارها است. اما از دیدگاه مالکین خطوط ریلی، استفاده بهینه از ظرفیت شبکه ریلی و برنامه‌ریزی بیشترین تعداد قطار ممکن در شبکه ریلی، مد نظر قرار دارد. در تحقیق حاضر، مسئله زمانبندی حرکت قطارها از هر دو دیدگاه مورد بررسی قرار گرفته است. به عبارتی در تولید برنامه زمانبندی، معیار زمانهای توقف غیربرنامه‌ای قطارها از دیدگاه مسافرین قطار و معیار ظرفیت شبکه از دیدگاه شرکت راه‌آهن، مدنظر بوده است. جهت بهره‌برداری بهینه از ظرفیت زیرساختهای ریلی موجود، بایستی برنامه‌ریزی و زمانبندی حرکت قطارها در فشرده‌ترین حالت و با در نظر گرفتن محدودیت عملیاتی انجام شود.

۲. مطالعه ادبیات

تحقیقات انجام گرفته در حوزه زمانبندی حرکت قطارها از دیدگاه نوع ساختار ریلی قابل دسته‌بندی است. یک ساختار ریلی می‌تواند شامل مسیرهای تک خطه، مسیرهای دوخطه، مسیرهای ترکیبی دوخطه یا چند خطه و در حالت کلی یک شبکه ریلی باشد. در

اکثر تحقیقات انجام گرفته در مسیرهای دوخطه ریلی، زمان‌بندی قطارهای رفت و برگشت به طور مستقل در مسیرهای تک‌خطه و تک‌جهته در نظر گرفته شده است. در تحقیقی از کاپرارا و همکاران [Caprara, et. al., 2002]، از یک مدل شبکه زمان-مکان[4] برای مدل‌سازی مسئله زمان‌بندی حرکت قطارها در مسیرهای تک خطه و تک جهته و از روش آزادسازی لاگرانژ برای حل مسئله استفاده شده است. بوردت و کوزان [Burdett and kozan, 2006]، مسئله تعیین ظرفیت تئوری و عملی در یک شبکه ریلی را با رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی مطالعه کرده اند. آنها برای تعیین ظرفیت یک محور یا شبکه ریلی، حل مسئله زمانبندی حرکت قطارها را پیشنهاد کرده‌اند. در تحقیقی از سحین و همکاران [Şahin, 2008]، مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط بر مبنای مدل شبکه زمان-مکان برای زمان‌بندی قطارهای باری ارائه شده است. ژو و ژانگ [Zhou and Zhong, 2005]، مسئله زمان‌بندی قطارها در مسیرهای دوخطه را با تابع هدف چندگانه و در قالب مسائل زمان‌بندی پروژه با منابع محدود بررسی کرده اند. مدل زمانبندی کارگاهی توسط بوردت و کوزان، [Burdett and Kozan, 2010] و همچنین لیو و کوزان [Liu and Kozan, 2009]، برای مدل‌سازی مسائل زمانبندی حرکت قطارها مورد استفاده قرار گرفته است. لیو و کوزان [Liu and Kozan, 2010]، مسئله زمان‌بندی حرکت قطارها را با در نظر گرفتن اولویت برای هر قطار، در قالب مدل زمان‌بندی کارکارگاهی منعطف با فرض عدم تاخیر کارها و محدودیت ظرفیت بین ماشین‌ها، مدل‌سازی کرده‌اند. در مدل ارائه شده، قطارهای مسافری سریع‌السیر دارای اولویت بالاتری نسبت به سایر قطارها بوده و باید بدون توقف غیربرنامه‌ای به مقصد برسند. اما سایر قطارها ممکن است به دلیل پر بودن بلاکهای مسیر، منتظر آزاد شدن بلاکها شوند. آنها همچنین یک روش ابتکاری برای تولید برنامه‌های زمانبندی شدنی در حالت مشخص بودن توالی اعزام قطارها، با هدف حداقل کردن طول افق زمان‌بندی ارائه کرده‌اند. بوردت و کوزان [Burdett and Kozan, 2010] همچنین از مدل گردش کارگاهی ترکیبی[5] و تئوری گراف در مسئله زمانبندی قطارها در شبکه ریلی استفاده کرده‌اند. تحقیقاتی که مسئله تعیین حداکثر ظرفیت ریلی را مورد بحث قرار داده‌اند، در جدول ۱، خلاصه شده‌اند.

تحقیقات مختلفی نیز در مسائل زمانبندی حرکت قطارها در ایران انجام شده است. سپهری و پورسیدآقایی (۱۳۷۸) مسئله زمانبندی حرکت قطارها در مسیرهای تک‌خطه را با هدف کمینه کردن مجموع

جدول ۱. تقسیم بندی مقالات مرتبط با موضوع ظرفیت خطوط شبکه ریلی

روش حل	تابع هدف	رویکرد مدلسازی	نویسندگان
الگوریتم بهبودیافته SBP[6] و ترکیب الگوریتم جستجوی ممنوع TS[7] وشبیه‌سازی تبرید SA[8]	طول افق زمانبندی	مدل گردش کارگاهی با ماشین های موازی و محدودیت ظرفیت بین مراحل	[Liu and Kozan, 2009]
ترکیب الگوریتم های ابتکاری ایجادی و بهبود دهنده BIH[9]	طول افق زمانبندی	مدل گردش کارگاهی با ماشین های موازی و محدودیت ظرفیت بین مراحل	[Liu and Kozan, 2010]
روشهای دقیق (الگوریتم شاخه و حد)	طول افق زمانبندی	تئوری گراف	[Pena, et. al., 2010]
ترکیب الگوریتم ابتکاری ایجادی و الگوریتم فراابتکاریشبیه‌سازی تبرید	طول افق زمانبندی	مسئله گردش کارگاهی ترکیبی	[Burdett and Kozan, 2010]
–	بیشینه کردن سود زمانبندی قطارها	مدل های ابرگراف[10] و مسئله جریان چندکالایی[11]	[Harrod 2009]
روش‌های ابتکاری	بیشینهکردنتعدادقطارهایقابلبرنامه‌ریزی	مسئله گردش کارگاهی	[Burdett and Kozan, 2006]

وزنی زمان سفر قطارها بعلاوه مجموع زمانهای توقف قطارها در ایستگاهها مورد بررسی قرار داده‌اند[Sepehri and Pourseyed-aghaiee, 1998]. برای این مسئله یک مدل برنامه‌ریزی عددصحیح مختلط ارائه و با استفاده از روش‌های تولید محدودیت، نامساویهای معتبر و یک روش ابتکاری سعی در یافتن یک حد بالای موثر در مسائل با ابعاد واقعی شده است. شفاهی و فندرسکی (۱۳۸۲) نیز از روش‌های ابتکاری برای تهیه برنامه زمانبندی اولیه حرکت قطارها و همچنین برنامه مسدودی بلاک‌ها با هدف کمینه کردن مجموع کل زمان تاخیر قطارها در یک مسیر تک خطه استفاده کرده‌اند[Sha-fahi and fendereski, 2003]. شفاهی و عابدینی (۱۳۸۳) برای زمانبندی حرکت قطارها در مسیری با بلاک‌ها تک خطه و دوخطه یک الگوریتم جستجوی ممنوع با هدف کمینه کردن مجموع زمان توقفات غیربرنامه‌ای قطارها ارائه کرده‌اند[Shafahi and Abedini, 2004]. شفاهی و عزیزخانی (۱۳۸۳) نیز برای زمانبندی حرکت قطارها در مسیری با بلاک‌ها تک خطه و دوخطه با هدف کمینه کردن مجموع زمان توقفات غیربرنامه‌ای قطارها از الگوریتم ژنتیک استفاده کرده‌اند[Shafahi ans Azizkhani, 2004]. قصیری و مرشد سلوک (۱۳۸۴) از الگوریتم فوق ابتکاری سیستم اجتماع مورچه ها[۱۲] برای حل مسئله زمان‌بندی حرکت قطارها در مسیرهای تک خطه استفاده کرده‌اند. در مدل آنها، سرعت و زمانهای سیر قطارها در بلاکها مقدار ثابت فرض شده اند و امکان سبقت قطارها در ایستگاه وجود ندارد. تابع هدف مسئله نیز بصورت مجموع زمانهای توقف غیربرنامه‌ای تمام قطارها در ایستگاههای مسیر در نظر گرفته شده است[Ghoseiri and Morshedsolouk, 2005]. خادم ثامنی (۱۳۸۶) یک الگوریتم ژنتیک برای کمینه کردن مجموع وزنی زمان سفر قطارها در یک مسیر دو خطه ریلی، ارائه کرده است. در تحقیق فوق فرض شده است که توقف قطارها در اولین ایستگاه مجاز در بازه افق شرعی انجام می‌شود. لذا برنامه توقف قطارها به شکل متغیر تصمیم در نظر گرفته نشده است[KhademSameni, 2007]. جمیلی و کیانفر (۱۳۸۸) از الگوریتم عملیات حرارتی شبیه‌سازی شده برای زمانبندی حرکت قطارها با هدف کمینه کردن مجموع زمان سفر قطارها در یک مسیر تک خطه استفاده کرده‌اند. در تحقیق فوق الذکر، محدودیت ظرفیت ایستگاه و همچنین برنامه توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی لحاظ نشده است[Jamili and Kianfar, 2009]. یقینی و محمدزاده (۱۳۹۰) مسئله زمانبندی حرکت قطارها در مسیرهای دوخطه ریلی را با هدف کمینه کردن مجموع کل زمان تاخیر قطارها در نظر گرفته اند[Yaghini and Mohammadzadeh, 2011]. جمیلی (۱۳۹۰) مسئله زمانبندی دوره ای قطارها در شبکه‌های ریلی و تعیین ظرفیت زیرساخت های ریلی را مد نظر قرار داده است. در تحقیق جمیلی (۱۳۹۰) با بکارگیری روش‌های استوارسازی یک برنامه زمانبندی، روشی برای تعیین ظرفیت عملی ارائه شده است. همچنین چندین الگوریتم پیشنهادی برای محاسبه ظرفیت تئوری و عملی و با استفاده از روش‌های استوارسازی برنامه زمانبندی ارائه کرده است[Jamili, 2011]. حسن نایبی (۱۳۹۰) برای مسئله زمانبندی حرکت قطارها در مسیرهای دوخطه با هدف کمینه کردن طول افق زمانبندی، یک الگوریتم فراابتکاری ترکیبی متشکل از روش جستجوی تصادفی تطابقی حریصانه[۱۳] و روش جستجوی همسایگی متغیر[۱۴] ارائه کرده است. در تحقیق فوق، یک مدل برنامه‌ریزی عددصحیح برای تعیین توالی اعزام و برنامه توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی ارائه شده است[HassanNayebi, 2011]. یقینی و نیکو (۱۳۹۰) به ارائه مدل بهینه‌سازی بر مبنای مسئله جریان چند کالایی در شبکه مکان- زمان و ارزیابی ظرفیت مسیرهای تک خطه پرداخته اند. تابع هدف مدل، تعداد مسیرهای قطار را بر روی شبکه زمان- مکان حداکثر می‌نماید اما هیچ شاخصی از رضایت مسافرین مانند کمتر شدن زمانهای تاخیر و توقف غیربرنامه‌ای در این مدل ارائه نشده است[Yaghini and Nikou, 2011].

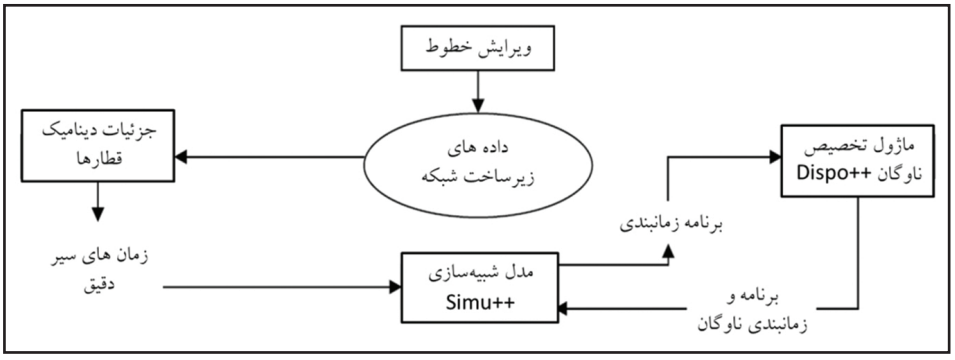
اهمیت برنامه‌ریزی ریلی منجر به توسعه نرم افزارها و ارایه مقالات متعدد علمی در زمینه بهینه سازی سیستم‌های حمل‌ونقل ریلی

شده است. به عنوان نمونه، نرم‌افزار تجاری RailSys از شرکت Rmcon آلمان است که در راه‌آهن ج.ا.ا نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. این نرم افزار از مدل شبیه‌سازی تصادفی خاص خود که بر اساس جزئیات زیرساخت خطوط ریلی ساخته شده است، جهت تولید و ارزیابی جداول زمانبندی استفاده می‌کند [Bendfeldt, et al., 2000]. در ساختار مدل شبیه‌سازی این نرم افزار (شکل ۲. ساختار اجزای سیستم و مدل شبیه‌سازی در نرم افزار RailSys)، ایجاد توقفات قابل جابجایی مانند اقامه نماز در بازه‌های افق شرعی و در هر یک از ایستگاههای دارای امکانات نمازخانه ای، قابل انجام نیست. مدل‌سازی برنامه زمان‌بندی پیشنهاد شده به وسیله ماژول شبیه‌سازی انجام شده و نتایج برنامه زمانی به کاربر اعمال می‌شود. در نرم افزار RailSys، بهینه‌سازی برنامه زمان‌بندی به دلیل پیچیدگی‌های متعدد، توسط سیستم انجام نمی‌پذیرد. از این رو، نقطه قوت نرم افزار RailSys تنها در ارزیابی استواری و پایداری برنامه‌های زمانبندی با در نظر گرفتن زمانهای سیر احتمالی است، اما رویکردهای حل دقیق برای بهینه‌سازی ظرفیت یا سایر شاخص‌های سیستم حمل‌ونقل ریلی در آن طراحی نشده است.

در تحقیق حاضر، همان طور که در بخش (۲) گفته شد، تاثیر چهار عامل توالی اعزام، سرفاصله زمانی[15] بین اعزام قطارها، نحوه ورود قطارها به خطوط ایستگاهها و برنامه توقف قطارها بررسی شده است. در ادبیات موضوع، تحقیقی جهت بررسی این چهار عامل به طور یکپارچه با هدف بهره‌برداری بهینه از ظرفیت موجود، یافت نشد و این تحقیق دارای نوآوری در ارائه یک مدل یکپارچه جهت زمانبندی قطارها با هدف کمینه سازی طول افق برنامه‌ریزی، مطابق با محدودیت‌های عملیاتی در راه‌آهن ایران است.

۳. تعریف مسئله در قالب مدل زمانبندی جریان کارگاهی منعطف

یک مسیر ریلی تک خطه و تک جهته، با m ایستگاه (m−۱ بلاک)، معادل یک مسئله جریان کارگاهی منعطف[16] با ۲m−۱ مرحله کاری است. با توجه به قوانین ریلی در راه‌آهن ایران، بلاک بین دو ایستگاه می‌تواند مانند یک تک ماشین در نظر گرفته شود. فرض می‌شود که تمامی قطارها از تمام ایستگاهها و بلاک‌های مسیر عبور می کنند. اگر قطارها را معادل کارها و همچنین بلاکها و خطوط ایستگاهها را معادل تک ماشین در نظر بگیریم، آنگاه زمانهای سیر قطارها روی بلاک‌ها و زمانهای توقف برنامه‌ای قطارها روی خطوط ایستگاه نیز معادل زمانهای پردازش کارها روی ماشین ها هستند. در نتیجه با توجه به تک خطه بودن بلاک‌ها، مسئله به حالت خاصی از مدل جریان کارگاهی منعطف بدون ظرفیت صف میانی بین ایستگاهی، تبدیل می‌شود. زمان اشغال شدن بلاک‌ها نباید بیشتر از زمان سیر قطارها باشد. سبقت قطارها مجاز نیست و در نتیجه توالی اعزام قطارها در تمامی ایستگاهها یکسان است. همه قطارها در لحظه صفر در دسترس و آماده اعزام هستند. همچنین هیچ بافر میانی بین ایستگاهها و بلاکهای مسیر وجود ندارد. تمام قطارها باید بدون هیچگونه توقف[17] غیربرنامه‌ای به مقصد برسند. برای ورود قطارها

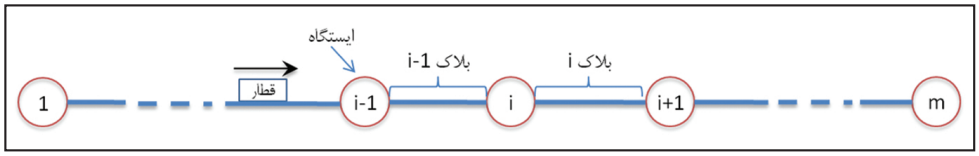


شکل ۲. ساختار اجزای سیستم و مدل شبیه‌سازی در نرم افزار RailSys

به خطوط ریلی داخل ایستگاه، محدودیت تعداد خطوط و سکوهای داخل ایستگاه در نظر گرفته شده است. به دلایل مختلفی مانند طول و ظرفیت هر یک از خطوط ایستگاه و همچنین نحوه ارتباط آنها با سکوها، خطوط داخل ایستگاه مشابه نیستند. در هنگام ورود یک قطار به یک ایستگاه، مجموعه خطوط مورد قبول این قطار بستگی به برنامه توقف این قطار در این ایستگاه دارد. یک قطار نمی‌تواند به هر خط ریلی آزاد در ایستگاه وارد شود. در صورت وجود توقف برنامه‌ریزی شده مانند مسافرگیری و اقامه نماز در این ایستگاه، قطار فوق باید روی یکی از خطوط ایستگاه که سکوی آزاد دارد، توقف داشته باشد. در این حالت خطوطی که شامل سکو هستند، جزء مجموعه مجاز تخصیص قرار دارند. این محدودیت در مسائل زمانبندی، تحت عنوان محدودیت تخصیص کارها به ماشینها[18] در مراحل کاری در نظر گرفته می‌شود. مجموعه خطوط داخل ایستگاه **i**ام که قطار **j**ام می‌تواند به آنها تخصیص یابد را با نماد M_{ij} نشان داده می شود. اگر قطار **j**ام در ایستگاه **i**ام توقف برنامه‌ای داشته باشد، مجموعهM_{ij}شامل خطوطی است که دارای سکوی باشند و در غیراین صورت، این مجموعه شامل کلیه خطوط ایستگاه **i**ام است. با توجه به نامشخص بودن مکان توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی، مجموعه خطوط قابل تخصیص در هر ایستگاه از قبل مشخص نبوده و بستگی به برنامه توقف هر قطار دارد. در صورتی که زمان لازم (زمان فرجه) برای اقامه نماز مسافرین در ایستگاههای مبدا یا مقصد وجود نداشته باشد، قطارها ملزم به توقف در یکی از ایستگاههای بین راه هستند. مکان و مدت توقف قطارها برای اقامه نماز مسافرین در بازه‌های افق شرعی نامشخص بوده و وابسته به زمان اعزام از مبدا، زمان رسیدن قطار به مقصد، اوقات شرعی و همچنین خصوصیات زیرساختی ایستگاه است. در مسیرهای دوخطه با توجه به سمت قرارگیری سکو و نمازخانه، ممکن است مسافرین یک زمان اضافی (ε) علاوه بر زمان لازم برای اقامه نماز، نیاز داشته باشند. در ایستگاههایی که سمت سکوی ایستگاه در سمت نمازخانه ایستگاه باشد، زمان توقف، همان زمان لازم برای اقامه نماز (۲۰ دقیقه) است و در غیراین صورت یک زمان اضافی (معمولا ۵ دقیقه) به زمان توقف برای اقامه نماز اضافه می‌شود. با توجه به وابسته بودن مدت زمان توقف قطارها به نوع نماز و خصوصیات زیرساختی ایستگاه، یافتن برنامه بهینه برای توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی، دشوارتر می‌شود. زمانهای توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی را می‌توان همانند عملیاتی مستقل[19] در نظر گرفت که بتواند در مراحل متفاوتی پردازش شود. چنین فرضی در مسائل معمول جریان کارگاهی که در آن هر فعالیت باید تنها در یکی از مراحل پردازش شود، وجود ندارد. با توجه به تشریح فرضیات، مسئله مورد بررسی در این تحقیق مشابه مدل زمان‌بندی جریان کارگاهی منعطف بوده و مطابق نمادگذاری مسائل تئوری توالی عملیات که توسط پیندو [Pinedo, 2008] ارائه شده است، می‌تواند بصورت $FF_c|no-wait,prmu,M_{ij}|C_{max}$، خلاصه شود.

در ادامه، مدل برنامه‌ریزی عددصحیح برای تعیین یک برنامه زمانبندی اولیه با هدف حداقل کردن طول افق زمان‌بندی ارائه می‌شود. ساختار شبکه ریلی مورد بررسی شامل یک محور کاملا دو خطه شامل خطوط ریلی و همچنین ایستگاههای بین راهی جهت توقف برنامه‌ای قطارها است. در یک محور کاملا دو خطه، قطارهای رفت و برگشت روی مسیرهای مجزایی حرکت می کنند. در صورتی که تمام بلاکهای مسیر در طول افق زمانبندی در دسترس باشند (فرض عدم مسدودی بلاک‌ها) یک محور کاملا دو خطه می‌تواند به دو مسیر تک خطه و تک جهته تقسیم شود. با در نظر گرفتن این فرض در این تحقیق، مسئله توالی اعزام قطارها در یک مسیر تک خطه و تک جهته بررسی می‌شود (شکل ۳. ساختار یک مسیر ریلی تک خطه و تک جهته).

تعریف مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرهای تصمیم مدل برنامه‌ریزی عددصحیح ارائه شده، در جدول ۲ و جدول ۳ آمده است. هدف یافتن توالی اعزام، فاصله بین اعزام قطارها، تخصیص قطارها به



شکل ۳. ساختار یک مسیر ریلی تک خطه و تک جهته

جدول ۲.مجموعه ها و پارامترهای مدل برنامه‌ریزی عددصحیح

نماد	تعریف
n	تعداد قطارها
m	تعداد ایستگاهها (تعداد بلاک‌ها برابر m-1 است)
H	تعداد بازه‌های افق شرعی
I	مجموعه ایستگاهها
j	اندیس قطارها
i	اندیس ایستگاهها و بلاک‌ها
s	اندیس توالی اعزام قطارها
p	اندیس بازه‌هایافق شرعی
u	اندیس خطوط موجود در ایستگاهها
p_{ij}	زمان سیر قطار jام در توالی روی بلاک iام
t_{ij}	زمان توقف برنامه‌ای قطار jام در توالی در ایستگاه iام
r_i	تعداد کل خطوط قبول و اعزام موجود در ایستگاه iام
b_i	تعداد خطوط متصل به سکو در ایستگاه iام
s_p	زمان در نظر گرفته شده برای اقامه نماز مسافرین در بازه افق شرعی pام
ε	زمان اضافی توقف قطار در ایستگاه جهت رسیدن مسافرین به نمازخانه
s_{pi}	زمان توقف قطارها به دلیل اقامه نماز در بازه افق شرعی pام در ایستگاه iام
λ_i	اگر نمازخانه در مجاورت سکوی ایستگاه iام نباشد برابر ۱ در غیر اینصورت برابر ۰ است.
t_p	فرجه زمانی لازم برای اقامه نماز در ایستگاههای مبدا و مقصد در بازه افق شرعی pام
β_i	اگر ایستگاه iام دارای نمازخانه باشد برابر ۱ و در غیر اینصورت برابر ۰ است.
L_{pi}	ابتدای بازه افق شرعی pام در ایستگاه iام
U_{pi}	انتهای بازه افق شرعی pام در ایستگاه iام
M	عدد مثبت بزرگ

جدول ۳.متغیرهای تصمیم مدل برنامه‌ریزی عددصحیح

نماد	تعریف
w_{uis}	اگر قطار sام در توالی، به uامین خط از ایستگاه iام تخصیص داده شود، برابر ۱ و در غیر اینصورت ۰ است.
μ_{is}	اگر قطار sام در توالی، در ایستگاه iام توقف برنامه‌ای داشته باشد، برابر ۱ و در غیر اینصورت ۰ است.
x_{js}	اگر قطار jام به موقعیت sام از توالی اعزام تخصیص یابد برابر ۱ و در غیراینصورت برابر ۰ است.
d_{is}	زمان خروج قطار sام در توالی اعزام از ایستگاه iام
c_{is}	زمان رسیدن قطار sام در توالی اعزام به ایستگاه iام
g_{pis}	اگر قطار sام در توالی اعزام در بازه افق شرعی pام در ایستگاه iام توقف کند برابر ۱ و در غیر اینصورت برابر ۰ است.
ms_{is}	بیشینه زمان توقف برنامه‌ای قطار sام در توالی اعزام در ایستگاه iام
AP_{ps}	اگر قطار sام ملزم به توقف در بازه افق شرعی pام باشد برابر ۱ و در غیر اینصورت برابر ۰ است.
τ_{ps}	اگر زمان اعزام قطار sام از مبدا بعد از ابتدای بازه افق شرعی pام بعلاوه زمان فرجه باشد برابر ۱ و در غیر اینصورت برابر ۰ است.
φ_{ps}	اگر زمان رسیدن قطار sام به مقصد بعد از انتهای بازه افق شرعی pام منهای زمان فرجه باشد برابر ۱ و در غیر اینصورت برابر ۰ است.

خطوط ایستگاه و تعیین برنامه توقف هر قطار در بازه‌های افق شرعی است.

مدل برنامه‌ریزی عددصحیح برای مسئله توالی اعزام قطارها در روابط (۱) الی (۲۷) خلاصه شده است. کاربرد مدل برنامه‌ریزی عددصحیح ارائه شده در تولید برنامه‌های زمانبندی عملیاتی است که بیشترین بهره‌برداری از ظرفیت زیرساخت های ریلی موجود در آن انجام گیرد. تابع هدف طول افق زمانبندی و یا به عبارتی زمان رسیدن آخرین قطار در توالی اعزام به ایستگاه مقصد است.

بر اساس محدودیت‌های (۲) و (۳)، هر قطار تنها در یک موقعیت از توالی اعزام می‌تواند قرار بگیرد و همچنین هر موقعیت توالی اعزام تنها به یک قطار می‌تواند تخصیص یابد. محدودیت (۴) بیان می‌کند که زمان رسیدن هر قطار در توالی اعزام به هر ایستگاه برابر زمان خروج از ایستگاه قبل به علاوه زمان سیر بلاک خواهد بود. برای اعزام یک قطار از هر ایستگاه باید بلاک مقابل آزاد شده باشد یا به عبارتی قطاری داخل بلاک نباشد. مطابق با محدودیت (۵) زمان اعزام قطارsام از ایستگاه iام باید بعد از زمان رسیدن قطار قبلی (قطار ۱-sام) به ایستگاه بعدی (ایستگاه ۱+iام) باشد. با توجه به محدودیت ظرفیت ایستگاه، زمان اعزام یک قطار از یک ایستگاه وابسته به زمان اعزام قطارهای قبلی از ایستگاه بعدی است. در واقع زمان اعزام یک قطار از یک ایستگاه باید بعد از زمان آزاد شدن خطی از ایستگاه بعدی باشد که به آن تخصیص یافته است. برای مدل‌سازی این محدودیت فرض می کنیم که قطار sام در توالی در ایستگاه ۱+iام به خط uام تخصیص یافته باشد. در این حالت زمان اعزام این قطار از ایستگاه iام باید دیرتر از زمان آخرین قطاری باشد که به همان خط از ایستگاه ۱+iام تخصیص یافته است (محدودیت ۶). محدودیت‌های (۷) و (۸) بیان می کنند که اگر بیشینه زمان توقف قطاری در ایستگاهی صفر باشد، آنگاه توقف قطار در آن ایستگاه، از نوع برنامه‌ای و در غیراین صورت از نوع غیربرنامه‌ای خواهد بود. به دلیل فرض عدم توقف غیربرنامه‌ای قطارها، اگر قطاری در یک ایستگاه زمان توقف غیر صفر داشته باشد، آنگاه نوع توقف حتما از نوع برنامه‌ای است. محدودیت (۹) بیان می‌کند که هر قطار در هنگام ورود به هر ایستگاه باید یکی از خطوط ایستگاه را جهت ورود، انتخاب کند. محدودیت (۱۰) نیز بیان می‌کند که اگر قطار در هنگام ورود به هر ایستگاه باید توقف داشته باشد، باید به یکی از خطوط ایستگاه که دارای سکو است، وارد شود. در غیراین صورت می‌تواند از بین کلیه خطوط ایستگاه، یکی را جهت ورود انتخاب کند. فرض می‌شود که خطوط ایستگاه که دارای سکو هستند به ترتیب با اندیس‌های $1,2,\ldots,b_i$ و خطوط ایستگاه که بدون سکو هستند با اندیس های $b_i+1, b_i+2,\ldots$, r_i نشان داده شده اند. محدودیت (۱۱) بیان می‌کند که زمان اعزام یک قطار از یک ایستگاه برابر زمان رسیدن آن به ایستگاه بعلاوه زمان توقف برنامه‌ای در ایستگاه است. فعالیت‌های مختلف در یک ایستگاه (مسافرگیری، اقامه نماز و ...) به طور موازی انجام می‌شود و بنابراین بیشینه زمان این فعالیت‌ها به عنوان زمان توقف برنامه‌ای در ایستگاه در نظر گرفته می‌شود.

برای این منظور می‌توان بیشینه زمان توقف برنامه‌ای قطارها در ایستگاهها (ms_{is}) را بزرگ تر از زمان فعالیتهای مختلف در یک ایستگاه قرار داد. اما با توجه به اینکه نباید قطاری توقف غیربرنامه‌ای داشته باشد نمی‌توان از نامساوی استفاده کرد. از این رو، باید تعیین شود که زمان کدام یک از این فعالیت‌ها بزرگ تر هستند و سپس مقدار ms_{is} برابر با مقدار بیشترین زمان فعالیت‌ها قرار داده شود. در مدل برنامه‌ریزی عددصحیح ارائه شده، دو نوع توقف برنامه‌ای درنظر گرفته شده است. در نوع اول از توقف‌های برنامه‌ای (فعالیتهایی مانند مسافرگیری و آبگیری)، زمان و مکان توقف از قبل مشخص است. بیشینه زمان فعالیت‌های نوع اول را با نماد t_{ij} نشان می دهیم. در نوع دوم توقف‌های برنامه‌ای که همان توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی است، زمان و مکان توقف نامشخص است. برای تعیین اینکه کدام یک از این دو نوع توقف برنامه‌ای دارای زمان بیشتری هستند، از متغیر $f_{is}\in\{0,1\}$ استفاده می‌شود. اگر f_{is} برابر ۰ باشد، آنگاه

زمان توقف برنامه‌ای نوع دوم بیشتر از نوع اول است (محدودیت ۱۲) و در غیر این صورت، زمان توقف برنامه‌ای نوع اول بیشتر از نوع دوم خواهد بود (محدودیت ۱۳). حال اگر زمان توقف برنامه‌ای نوع اول بیشتر از نوع دوم باشد آنگاه مقدار بیشینه زمان توقف برنامه‌ای قطار (ms_{is}) می بایست برابر با زمان توقف برنامه‌ای نوع اول باشد (محدودیت‌های ۱۴ و ۱۵).

در غیراین صورت، مقدار بیشینه زمان توقف برنامه‌ای یک قطار برابر با زمان توقف برنامه‌ای نوع دوم است (محدودیت‌های ۱۶ و ۱۷). محدودیت (۱۸) بیان می‌کند که در صورت ملزم بودن قطار sام برای توقف در بازه افق شرعی pام، این قطار باید در یکی از ایستگاههای بین راه در بازه افق شرعی توقف داشته باشد. محدودیت (۱۹) بیان می‌کند اگر ایستگاه iام دارای نمازخانه نباشد، آنگاه هیچ قطاری در هیچ بازه افق شرعی مجاز به توقف برای اقامه نماز در آن ایستگاه نیست.

یکی از شرایطی که برای برنامه توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی در راه‌آهن ایران در نظر گرفته می‌شود، الگو یا ساختار پله ای است. به طور کلی، اگر توقف قطار sام در توالی اعزام، در بازه افق شرعی pام در ایستگاه iام صورت گرفته باشد، آنگاه توقف قطارهای بعدی در توالی اعزام (s+1,s+2,...,n) می بایست در ایستگاه iام و یا ایستگاههای ماقبل (1,2,...,i−1) صورت بگیرد. به این ترتیب، یک ساختار پله‌ای برای برنامه توقف قطارهای متوالی ایجاد شده و برنامه زمانبندی مطلوبی به دست می‌آید. مطابق رابطه (۲۰)، اگر قطار sام در توالی اعزام، در بازه افق شرعی pام در ایستگاه iام توقف داشته باشد، آنگاه قطار بعدی (قطار s+1ام) در ایستگاههای بعدی (i+1,i+2,...,m−1) در بازه افق شرعی pام، توقف نداشته باشد. محدودیت (۲۱) بیان می‌کند که اگر یکی از شرایط توقف در بازه افق شرعی pام برای قطار sام برقرار نباشد، آنگاه قطار فوق ملزم به توقف در ایستگاههای بین راه نیست. محدودیت (۲۲) نیز بیان می‌کند که اگر هر دو شرط توقف در بازه افق شرعی pام برای قطار sام در توالی اعزام برقرار باشد، آنگاه این قطار باید در یکی از ایستگاههای بین راه توقف داشته باشد. دو شرط توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی به کمک دسته محدودیتهای (۲۳) و (۲۴) به

$$min \;\; z = c_{mn} \tag{۱}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{js} = 1, \quad \forall s. \tag{۲}$$

$$\sum_{s=1}^{n} x_{js} = 1, \quad \forall j. \tag{۳}$$

$$c_{i+1,s} = d_{is} + \sum_{j=1}^{n} x_{js}.p_{ij}\,, \quad \forall s, \quad 1 \le i \le m-1. \tag{۴}$$

$$d_{is} \ge c_{i+1,s-1}, \;\; 1 \le i \le m-1, \;\; 2 \le s \le n. \tag{۵}$$

$$d_{is} + \left(2 - w_{u,i+1,s} - w_{u,i+1,k}\right).M \ge d_{i+1,k}\,, \quad k < s, \qquad 1 \le i \le m-1, \;\; 1 \le u \le r_i. \tag{۶}$$

$$\mu_{is} \le ms_{is}\,, \quad \forall s, i. \tag{۷}$$

$$ms_{is} \le M.\mu_{is}\,, \quad \forall s, i. \tag{۸}$$

$$\sum_{u=1}^{r_i} w_{uis} = 1\,, \quad \forall s, i. \tag{۹}$$

$$\sum_{u=1}^{b_i} w_{uis} \geq \mu_{is}\,, \quad \forall s,i. \tag{۱۰}$$

$$d_{is} = c_{is} + ms_{is}, \quad \forall s,i. \tag{۱۱}$$

$$\sum_{p=1}^{H} s_{pi}.g_{pis} + M.f_{is} \geq \sum_{j=1}^{n} x_{js}.t_{ij}\,, \quad \forall s,i. \tag{۱۲}$$

$$\sum_{p=1}^{H} s_{pi}.g_{pis} \leq \sum_{j=1}^{n} x_{js}.t_{ij} + M.(1-f_{is}), \quad \forall s,i. \tag{۱۳}$$

$$ms_{is} \leq \sum_{j=1}^{n} x_{js}.t_{ij} + M.(1-f_{is}), \quad \forall s,i. \tag{۱۴}$$

$$ms_{is} + M.(1-f_{is}) \geq \sum_{j=1}^{n} x_{js}.t_{ij}\,, \quad \forall s,i. \tag{۱۵}$$

$$ms_{is} \leq \sum_{p=1}^{H} s_{pi}.g_{pis} + M.f_{is}\,, \quad \forall s,i. \tag{۱۶}$$

$$ms_{is} + M.f_{is} \geq \sum_{p=1}^{H} s_{pi}.g_{pis}\,, \quad \forall s,i. \tag{۱۷}$$

$$AP_{ps} = \sum_{i=2}^{m-1} g_{pis}\,, \quad \forall s,p. \tag{۱۸}$$

$$g_{pis} \leq \beta_i, \quad \forall i,s,p. \tag{۱۹}$$

$$\sum_{k=i+1}^{m-1} g_{p,k,s+1} \leq 1 - g_{pis}, \quad \forall s,i,p. \tag{۲۰}$$

$$2.AP_{ps} \leq \tau_{ps} + \varphi_{ps}\,, \quad \forall s,p. \tag{۲۱}$$

$$\tau_{ps} + \varphi_{ps} \leq 1 + AP_{ps}\,, \quad \forall s,p. \tag{۲۲}$$

$$M.(\varphi_{ps} - 1) \leq c_{ns} - U_{pm} + t_p < M.\varphi_{ps}\,, \quad \forall s,p. \tag{۲۳}$$

$$M.(\tau_{ps} - 1) \leq L_{p1} + t_p - d_{1s} < M.\tau_{ps}, \quad \forall s,p. \tag{۲۴}$$

$$L_{pi} - M.(1-\beta_i.g_{pis}) \leq c_{is} \leq U_{pi} + M.(1-\beta_i.g_{pis}) - s_{pi}, \quad \forall s,p. \tag{۲۵}$$

$$s_{pi} = s_p + \varepsilon.\lambda_i, \quad \forall i,p. \tag{۲۶}$$

$$x_{js}, g_{pis}, w_{uis}, \mu_{is}, f_{is}, AP_{ps}, \tau_{ps}, \varphi_{ps} \in \{0,1\}, \quad \forall s,i,p,u. \tag{۲۷}$$

متغیرهای کمکی وابسته می‌شود. محدودیت (۲۵) نیز بیان می‌کند که زمان رسیدن قطار به ایستگاه، باید بعد از زمان ابتدای بازه افق شرعی و همچنین زمان اتمام نماز، قبل از انتهای بازه افق شرعی باشد. زمان توقف هر قطارها در بازه افق شرعی pام در ایستگاه iام نیز از رابطه (۲۶) به دست می‌آید.

۴. نامساویهای معتبر[۲۰]

با توجه به دشواریهای حل مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح در ابعاد واقعی، از روش نامساویهای معتبر برای کاهش زمان حل استفاده می‌شود.

به کمک نامساویهای معتبر می‌توان زمان حل دقیق مسئله توسط نرم

افزارهای بهینه سازی را کاهش داد. یکی از مزیتهای مدل‌سازی با اندیس توالی که در این تحقیق بکار رفته است، ساختار مناسبی است که از آن می‌توان در ارائه نامساویهای معتبر استفاده کرد. استفاده از نامساویهای معتبر برای کوچک کردن فضای موجه مسئله با برشهای عمیق در درخت جستجو می‌تواند در کاهش زمان حل مدل برنامه‌ریزی عددصحیح موثر باشد.

باید توجه کرد که اگرچه بکارگیری این دسته از محدودیتها، زمان حل مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح را کاهش می‌دهد اما کماکان قادر به حل مسائل با ابعاد بزرگ در زمان معقول نیست.

در ادامه، چند دسته از این نامساویهای معتبر که همگی مرتبط با محدودیت توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی هستند، ارائه می‌شود.

اثبات صحت هر یک از نامساوی‌ای معتبر ارائه شده در بخش پیوست تحقیق آمده است.

۴-۱ محدود کردن ایستگاهای کاندید برای توقف در بازه‌های افق شرعی

در اولین دسته از نامساویهای معتبر، هدف محدودکردن لیست ایستگاه‌های کاندید برای توقف در بازه‌های افق شرعی است. برای این منظور از خاصیت عدم اشتراک بازه‌های افق شرعی ($L_{p+1,i_1} > U_{pi_2}\ ,\ \ 1 \le p \le H-1,\ \ \forall i_1, i_2 \in I$)، استفاده می‌شود. توقف یک قطار در یک ایستگاه برای اقامه نماز، باعث محدود شدن ایستگاههای کاندید برای توقف در بازه‌های افق شرعی بعدی می‌شود.

به طور دقیق تر، اگر قطار sام در توالی در ایستگاه iام در بازه افق شرعی pام توقف داشته باشد، آنگاه این قطار در بازه افق شرعی p+۱ام در ایستگاههای قبل از ایستگاه iام، به دلیل خارج بودن از بازه افق شرعی، نمی‌تواند توقف داشته باشد. این شرایط در قالب نامساوی (۲۸) می‌تواند به مدل برنامه‌ریزی عددصحیح اضافه شود.

$$\sum_{k=2}^{i} g_{p+1,k,s} \le 1 - g_{pis},\quad \forall s, i,\ \ 1 \le p \le H-1. \quad (۲۸)$$

۴-۲ الگوی الزام یک قطار برای توقف در بازه‌های افق شرعی مختلف

با توجه به عدم اشتراک بین بازه‌های زمانی افق شرعی، می‌توان الگویی برای متغیر مربوط به الزام توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی به دست آورد. در واقع اگر یک قطار ملزم به توقف در بازه افق شرعی pام و p+۲ام باشد، آنگاه این قطار در افق شرعی p+۱ام نیز ملزم به توقف است. این شرط نیز بشکل نامساوی (۲۹) به مدل برنامه‌ریزی عددصحیح اضافه می‌شود.

$$AP_{ps} + AP_{p+2,s} - AP_{p+1,s} \le 1,\ \forall s,\ 1 \le p \le H-2. \quad (۲۹)$$

۴-۳ تعیین الگوی فعال شدن شرایط توقف قطارها در بازه افق شرعی

با توجه به ترتیب اعزام قطارها، اگر یک قطار در توالی اعزام، قبل از زمان ابتدای افق شرعی از مبدا اعزام شود، قطارهای قبلی نیز زودتر از زمان ابتدای افق شرعی از ایستگاه مبدا اعزام شده اند. همچنین اگر یک قطار در توالی اعزام، بعد از زمان ابتدای افق شرعی از مبدا اعزام شود، قطارهای بعدی نیز دیرتر از زمان ابتدای افق شرعی از ایستگاه مبدا اعزام می شوند. همچنین با توجه به فرض عدم سبقت قطارها، اگر زمان رسیدن قطاری به مقصد، بعد از انتهای بازه افق شرعی باشد، آنگاه قطارهای بعدی در توالی اعزام نیز دیرتر از زمان انتهای افق شرعی به مقصد می رسند. اگر زمان رسیدن قطاری به مقصد، قبل از ابتدای بازه افق شرعی باشد، آنگاه قطارهای قبلی در توالی اعزام نیز زودتر از زمان ابتدای افق شرعی به مقصد می رسند. در نتیجه می‌توان با مشخص شدن مقدار متغیرهای τ_{ps} و φ_{ps} . یا به دلیل شرایط توقف در بازه‌های افق شرعی، مقدار این دسته از متغیرها را برای سایر قطارهای موجود در توالی اعزام، تعیین کرد. به عبارتی اگر زمان اعزام قطار sام در توالی اعزام، از مبدا، بعد از زمان افق شرعی pام باشد، متغیر برابر صفر خواهد بود که همین وضعیت برای تمام قطارهای بعدی در توالی اعزام، برقرار خواهد بود (نامساوی ۳۰). همچنین اگر زمان اعزام قطار در توالی sام از مبدا قبل از زمان

افق شرعی نماز pام باشد، متغیر τ_{ps} برابر یک خواهد بود که در این حالت همین وضعیت برای تمام قطارهای قبلی در توالی اعزام، برقرار خواهد بود (نامساوی ۳۱).

$$\sum_{k=s+1}^{n} \tau_{pk} \le (n-s).\tau_{ps}\,, \quad \forall p,\ 1 \le s \le n-1. \quad (۳۰)$$

$$\sum_{k=1}^{s-1} \tau_{pk} \ge (s-1).\tau_{ps}\,, \quad \forall p,\ 2 \le s \le n. \quad (۳۱)$$

مشابه این محدودیتها را می‌توان برای متغیر φ_{ps} نوشت. اگر زمان رسیدن قطار در توالی sام به مقصد قبل از زمان افق شرعی نماز pام باشد، متغیر φ_{ps} برابر صفر خواهد بود و این وضعیت نیز برای تمام قطارهای قبلی در توالی اعزام، برقرار خواهد بود (نامساوی ۳۲). اگر زمان رسیدن قطار در توالی sام به مقصد بعد از زمان افق شرعی نماز pام باشد، متغیر φ_{ps} برابر یک خواهد بود که در این حالت همین وضعیت برای تمام قطارهای بعدی در توالی اعزام، برقرار خواهد بود (نامساوی ۳۳).

$$\sum_{k=1}^{s-1} \varphi_{pk} \le (s-1).\varphi_{ps}\,, \quad \forall p,\ 2 \le s \le n. \quad (۳۲)$$

$$\sum_{k=s+1}^{n} \varphi_{pk} \ge (n-s).\varphi_{ps}\,, \quad \forall p,\ 1 \le s \le n-1. \quad (۳۳)$$

۴-۴ تعیین شرایط توقف در بازه‌های افق شرعی برای هر قطار

با توجه به عدم اشتراک بین بازه‌های افق شرعی در ایستگاهها، می‌توان روابطی بین شرایط توقف در بازه‌های افق شرعی مختلف برای هر قطار در توالی اعزام، به دست آورد. در نتیجه می‌توان بعد از مشخص شدن مقدار متغیرهای τ_{ps} و φ_{ps}، مقدار این دسته از متغیرها را برای سایر بازه‌های افق شرعی نیز تعیین کرد. به دلیل اگر زمان اعزام قطار در توالی sام از مبدا بعد از زمان افق شرعی نماز pام باشد، متغیر τ_{ps} برابر صفر خواهد بود که مشابه این وضعیت برای این قطار در بازه‌های افق شرعی قبلی برقرار خواهد بود (نامساوی ۳۴). اگر زمان اعزام قطار در توالی sام از مبدا قبل از زمان افق شرعی pام باشد، متغیر τ_{ps} برابر یک خواهد بود که این وضعیت در بازه‌های افق شرعی بعدی نیز برای این قطار برقرار خواهد بود (نامساوی ۳۵).

$$\sum_{k=1}^{p-1} \tau_{ks} \le (p-1).\tau_{ps}\,, \quad \forall s,\ 2 \le p \le H. \quad (۳۴)$$

$$\sum_{k=p+1}^{H} \tau_{ks} \ge (H-p).\tau_{ps}\,, \quad \forall s,\ 1 \le p \le H-1. \quad (۳۵)$$

مشابه این محدودیت ها را می‌توان برای متغیر φ_{ps} نوشت. اگر زمان رسیدن قطار در توالی sام به مقصد قبل از زمان افق شرعی pام باشد، متغیر φ_{ps} برابر صفر خواهد بود و این وضعیت در بازه‌های افق‌های شرعی بعدی نیز برای این قطار برقرار خواهد بود (نامساوی ۳۶). اگر زمان رسیدن قطار در توالی sام به مقصد بعد از زمان افق شرعی pام باشد، متغیر φ_{ps} برابر یک خواهد بود و این وضعیت در بازه‌های افق های شرعی قبلی نیز برای این قطار برقرار خواهد بود (نامساوی ۳۷).

$$\sum_{k=p+1}^{H} \varphi_{ks} \le (H-p).\varphi_{ps}\,, \quad \forall s,\ 1 \le p \le H-1. \quad (۳۶)$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} \varphi_{ks} \ge (p-1).\varphi_{ps}\,, \quad \forall s,\ 2 \le p \le H. \quad (۳۷)$$

۵. نتایج

در این بخش، الگوی تولید نمونه مسائل تصادفی مطابق با شرایط واقعی در راه‌آهن ایران، جهت ارزیابی عملکرد مدل برنامه‌ریزی عددصحیح ارائه می‌شود. سرعت حرکت قطارها روی بلاکها تابعی از ویژگیهای بلاک و قطار است. قطارها از نظر حداکثر سرعت حرکت، به کلاسهای مختلفی مانند عادی، فوق العاده، سریع السیر، توربو و غیره تقسیم می شوند. قطارهای کاملا مشابه در یک کلاس قرار گرفته و زمان سیر و توقف برنامه‌ای یکسانی دارند. همچنین فرض می‌شود که زمان سیر قطارهای با کلاس سرعت بالاتر، روی هر بلاک، نسبت به قطارهای با کلاس پایین تر، کمتر یا مساوی است. همچنین زمان توقف برنامه‌ای قطارهای با کلاس سرعت بالاتر در هر ایستگاه، نسبت به زمان توقف قطارهای با کلاس پایین تر، کمتر است. تعداد کلاسهای سرعت با نماد Q ($1 \le Q \le n$) نشان داده می شود. با توجه به اطلاعات راه‌آهن ایران، تعداد کلاسهای سرعت در تمام نمونه مسائل تصادفی برابر Q=۵ در نظر گرفته می‌شود. تعداد قطارهای موجود در هر کلاس سرعت (n_i) نیز با توجه به

ابعاد مسئله (جدول ۴) تعیین می‌شود. زمان سیر پایه (زمان سیر کلاس اول) برای هر بلاک از توزیع یکنواخت گسسته [۸,۲۰] دقیقه، تولید می‌شود. از این زمان سیر پایه برای تولید زمانهای سیر قطارها درکلاس های سرعت بعدی، استفاده می‌شود. برای این منظور، در هر بلاک، زمانهای سیر هر کلاس سرعت، به طور بازگشتی از زمان سیر کلاس قبلی به کمک یک متغیر تصادفی کندی سیر، محاسبه می‌شود (رابطه ۳۸). مقدار متغیر تصادفی کندی سیر نیز، از توزیع یکنواخت گسسته در بازه [۰,۳] دقیقه، تولید می‌شود.

(۳۸) = زمان سیر کلاس qام

q>1 ،مقدارمتغیر تصادفی کندی سیر +زمان سیر کلاس q-1ام

زمان توقف برنامه‌ای پایه قطارها نیز در هر ایستگاه مشابه الگوی زمان سیر طبق توزیع یکنواخت گسسته [۰,۵] دقیقه تولید می‌شود. متغیر تصادفی جهت افزایش زمان توقف قطارها در کلاس های بعدی نیز از توزیع یکنواخت گسسته در بازه [۰,۲] دقیقه، تولید می‌شود. تعداد بازه‌های افق شرعی برابر با سه و بازه‌های زمانی مجاز توقف قطارها برای اقامه نمازهای صبح، ظهر- عصر و مغرب- عشاء مطابق جدول ۴، تعریف می‌شود. تعداد خطوط در ایستگاهها (r_i)، طبق توزیع یکنواخت گسسته $r_i \sim U[2,4]$، و تعداد سکوها نیز بعد از تولید تعداد خطوط ایستگاه از توزیع یکنواخت مطابق رابطه $b_i \sim U[1, r_i]$ تولید می شوند. هر ایستگاه با احتمال ۷۵ درصد دارای نمازخانه است. زمان توقف برای اقامه نماز و زمان فرجه برابر ۲۰ دقیقه و زمان برابر ۵ دقیقه در نظر گرفته می‌شود. نمونه مسائل تصادفی در سه دسته مسائل با ابعاد کوچک، متوسط و بزرگ مطابق جدول ۴، تولید می شوند. در هر دسته، ۵ نمونه مسئله، حل خواهد شد. تعداد توالی های ممکن برای اعزام قطارها برابر n! است. تعداد کل ایستگاههای دارای نمازخانه در مسیر را با نماد L نشان می دهیم که از رابطه $L = \sum_{i=1}^{m} \beta_i$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه هر قطار در H بازه افق شرعی، باید برای اقامه نماز مسافرین توقف کند، حداکثر تعداد حالات توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی برای یک توالی اعزام، برابر $L^{H.n}$ خواهد بود. تعداد کل حالات ترتیب ورود قطارها به خطوط ایستگاهها نیز برابر $(\prod_{i=1}^{m} r_i)^n$ است. در نتیجه حداکثر تعداد برنامه‌های زمانبندی شدنی (بدون در نظر گرفتن حالات مربوط به فاصله بین زمان اعزام قطارهای متوالی) بر حسب پارامترهای مسئله برابر $n!.\, L^{H.n}.\, (\prod_{i=1}^{m} r_i)^n$ است. مسئله زمانبندی جریان کارگاهی با بیش از دو مرحله، در رده مسائل NP-Hard قرار می‌گیرد [Pinedo, 2008]. در نتیجه برای حالتی که تعداد ایستگاههای مسیر حداقل ۳ (m≥3) و حداقل ۲ قطار (n≥2) جهت زمانبندی وجود داشته باشد، مسئله در شرایط NP-Hard است. با توجه به اینکه ابعاد مسائل واقعی در شبکه‌های ریلی همواره بسیار بزرگ تر از آستانه‌های گفته شده است، مسئله مورد بررسی در این تحقیق نیز در رده NP-Hard است. برای حل مسائل برنامه‌ریزی

جدول٤.پارامترهای نمونه مسائل تصادفی

ابعاد مسئله	شماره بازه افق شرعی (p)	بازه مجاز توقف	n×m	تعداد نمونه مسئله	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
	۱	[۴۰،۱۰]	۱۰× ۵	۵					
کوچک	۲	[۸۰،۵۰]	۱۰×۱۰	۵	۲	۲	۲	۲	۲
	۳	[۱۴۰،۱۰۰]	۱۰×۱۵	۵					
	۱	[۶۰،۲۰]	۲۰×۱۵	۵					
متوسط	۲	[۱۲۰،۸۰]	۲۰×۲۰	۵	۲	۴	۴	۵	۵
	۳	[۲۸۰،۲۰۰]	۲۰×۲۵	۵					
	۱	[۱۰۰،۴۰]	۳۰×۳۰	۵					
بزرگ	۲	[۳۰۰،۲۰۰]	۳۰×۳۵	۵	۴	۵	۵	۸	۸
	۳	[۶۰۰،۴۸۰]	۳۰×۴۰	۵					

ریاضی، از رایانه ای با سیستم عامل ویندوز۷، حافظه ۴ گیگابایت و پردازشگر۳,۳ گیگاهرتز استفاده شده است. برای حل مسائل برنامه‌ریزی عددصحیح از نرم افزار بهینه سازی CPLEX۱۲.۱ استفاده شده است. نتایج حل نمونه مسائل تصادفی در ابعاد کوچک در جدول ۵، خلاصه شده است. در این مسائل، با بکارگیری نامساویهای معتبر، به طور متوسط حدود ۲۵ درصد کاهش زمان حل بوجود آمده است. همچنین در حالت وجود نامساویهای معتبر، جواب بهینه تمامی نمونه مسائل در ابعاد کوچک در زمانی کمتر از ۵ دقیقه به دست آمده است. در مسائل با ابعاد متوسط، زمان حل به طور قابل ملاحظه ای افزایش یافته اما با بکارگیری نامساویهای معتبر، جواب بهینه تمامی نمونه مسائل در زمانی کمتر از ۲ ساعت به دست آمده است. در نمونه مسائل با ابعاد متوسط، میزان کاهش زمان حل نیز با بکارگیری نامساویهای معتبر به طور متوسط حدود ۲۴درصد بوده است

در هیچ یک از مسائل با ابعاد بزرگ، بعد از گذشت ۲ ساعت به جواب بهینه دستیابی نشد و پیش‌بینی می‌شود که حل مدل برنامه‌ریزی عددصحیح با ابعادی بزرگ تر از $n>۲۰$ و $m>۲۵$ در زمان پذیرفتنی ممکن نبوده و استفاده از روشهای ابتکاری و فراابتکاری گزینه عملی است. اما با توجه به اینکه در مسائل واقعی، معمولا توالی اعزام قطارها به دلیل بازه حرکت هر قطار از مبدا، ثابت فرض می‌شود، کاربرد مدل برنامه‌ریزی عددصحیح ارائه شده در مسائل با ابعاد بزرگ می‌تواند در یافتن برنامه توقف بهینه قطارها در بازه‌های افق شرعی، تخصیص خطوط و سکوها به ایستگاهها و همچنین تعیین سرفاصله زمانی مناسب بین اعزام قطارها از مبدا با هدف استفاده هرچه بهتر از ظرفیت منابع ریلی موجود باشد. فرض مشخص بودن توالی اعزام قطارها باعث کاهش قابل ملاحظه زمان حل مدل برنامه‌ریزی عددصحیح می‌شود. نتایج زمان حل مدل برنامه‌ریزی عددصحیح در مسائل با ابعاد بزرگ (نمونه مسائل ۳۱ الی ۴۵)، با فرض مشخص بودن

جدول۵. نتایج حل نمونه مسائل تصادفیدر ابعاد کوچک

شماره مسئله	CPLEX	CPLEX	نامساویهای معتبر+CPLEX	درصد کاهش زمان حل
	مقدار بهینه تابع هدف (دقیقه)	زمان حل(ثانیه)	زمان حل(ثانیه)	از بکارگیری نامساویهای معتبر
۱	۵۷۱	۰,۰۶	۰,۰۵	٪۱۶,۶۷
۲	۳۶۷	۱,۰۵	۱,۰۳	٪۱,۹۰
۳	۴۰۷	۰,۱۲	۰,۰۸	٪۳۳,۳۳
۴	۳۵۱	۰,۵۴	۰,۲۶	٪۵۱,۸۵
۵	۳۷۰	۰,۱۴	۰,۱۳	٪۷,۱۴
۶	۴۳۹	۷,۸۶	۷,۷۷	٪۱,۱۵
۷	۴۵۵	۷,۵۵	۶,۲۷	٪۱۶,۹۵
۸	۴۵۱	۱۶,۰۲	۱۲,۰۹	٪۲۴,۵۳
۹	۴۳۴	۷۶,۵۲	۶۳,۴۹	٪۱۷,۰۳
۱۰	۴۳۲	۱۶,۲۷	۱۳,۸۷	٪۱۴,۷۵
۱۱	۳۵۲	۱۲۸,۱۴	۴۶,۵۲	٪۶۳,۷۰
۱۲	۴۵۷	۲۱,۰۳	۱۴,۰۹	٪۳۳,۰۰
۱۳	۵۶۹	۴۶۶,۹۹	۳۰۱,۴۷	٪۳۵,۴۴
۱۴	۵۰۳	۳۱۷,۷۹	۲۲۵,۷۵	٪۲۸,۹۶
۱۵	۵۸۷	۷۸,۹۲	۵۷,۴۹	٪۲۷,۱۵
میانگین		۷۵,۹۳	۵۰,۰۲	٪۲۴,۹
انحراف استاندارد		۱۳۶,۸۴	۹۰,۴۲	٪۱۷,۳۳

جدول٦. نتایج حل نمونه مسائل تصادفی در ابعاد متوسط

شماره مسئله	CPLEX	CPLEX	نامساویهای معتبر +CPLEX	درصد کاهش زمان حل
	مقدار بهینه تابع هدف (دقیقه)	زمان حل(ثانیه)	زمان حل(ثانیه)	از بکارگیری نامساویهای معتبر
۱۶	۶۱۱	۱۹۸۲,۲۴	۱۷۹۱,۵۸	٪۹,۶۲
۱۷	۵۹۳	۵۲۴۴,۷۸	۴۴۸۰,۷۵	٪۱۴,۵۷
۱۸	۶۷۱	۴۱۱,۸۹	۳۳۹,۳۵	٪۱۷,۶۱
۱۹	۶۵۵	۱۵۹۱,۷۷	۱۰۳۳,۴۹	٪۳۵,۰۷
۲۰	۶۰۰	۴۰۱۰,۴۴	۲۸۵۷,۴۶	٪۲۸,۷۵
۲۱	۷۹۰	۱۹۴۳,۰۱	۱۸۱۶,۲۶	٪۶,۵۲
۲۲	۷۷۷	۲۷۵۰,۲۴	۱۵۰۶,۷۵	٪۴۵,۲۱
۲۳	۸۸۲	۱۱۸۲,۹۶	۷۰۱,۶۶	٪۴۰,۶۹
۲۴	۸۴۱	بیش از ۲ ساعت[1]	۵۹۲۳,۳۴	**نامشخص (N[2])**
۲۵	۸۵۱	۵۰۱۵,۳۸	۴۷۲۷,۵۱	٪۵,۷۴
۲۶	۹۱۳	۳۹۴۹,۳۴	۲۴۵۹,۵۴	٪۳۷,۷۲
۲۷	۹۴۸	بیش از ۲ ساعت	۷۰۸۴,۴۴	**N**
۲۸	۹۹۵	۱۲۳۳,۱۴	۹۷۳,۳۸	٪۲۱,۰۶
۲۹	۱۰۳۳	۶۱۲۶,۴۹	۵۲۷۸,۸۴	٪۱۳,۸۴
۳۰	۱۰۲۰	۹۱۷,۰۲	۶۰۰,۸۲	٪۳۴,۴۸
میانگین		۲۷۹۶,۸۲	۲۱۹۷,۴۹	٪۲۳,۹۱
انحراف استاندارد		۱۸۶۹,۰۶	۱۶۷۰,۶۶	٪۱۳,۷۲

(1) تا دو ساعت پس از شروع بهینه سازی به جواب بهینه دست نیافته است، (2) نامشخصبودن درصد کاهش زمان حل به دلیل عدم یافتن جواب بهینه در نرم افزار CPLEX

توالی اعزام، در جدول ۷ آمده شده است. نتایج نشان می‌دهد که با بکارگیری نامساویهای معتبر در نرم‌افزار CPLEX مسائل با ابعاد بزرگ با فرض مشخص بودن توالی اعزام قطارها نیز در زمانی کمتر از ۲ ساعت قابل حل هستند.

۶. مطالعه موردی

حدود یک چهارم شبکه ریلی کشور شامل خطوط تهران- مشهد، تهران- محمدیه، بافق- بندرعباس و قطعه ملکی- کرج از خط تهران- تبریز، به صورت دوخطه است. در این تحقیق زمانبندی قطارهای مسیرهای دو خطه تهران- گرمسار و تهران- محمدیه به عنوان مطالعه موردی انتخاب شده اند. زمانهای توقف برنامه‌ای قطارها در تمام ایستگاهها برابر ۰ در نظر گرفته شده است. تعداد کلاس های سرعت در مسیر تهران- محمدیه برابر Q=۴ و در مسیر تهران-گرمسار برای Q=۵ است.

تعداد قطارها در کلاس های سرعت در مسیرهای تهران-محمدیه و تهران-گرمسار در جدول ۸ خلاصه شده است. اطلاعات ایستگاههای مسیر تهران- محمدیه و تهران-گرمسار در فصل زمستان در جدول ۹ و جدول ۱۱ و اطلاعات زمانهای سیر در بلاک‌های مسیر تهران- محمدیه و تهران-گرمسار نیز درجدول ۱۰ و جدول ۱۲ آمده است.نتایج حل مسئله زمانبندی حرکت قطارها در مسیرهای تهران – محمدیه و تهران –گرمسار در جدول ۱۳ آمده است.

مطابق نتایج جدول ۱۳، تاثیر بکارگیری نامساویهای معتبر در کاهش زمان حل دقیق مسائل برنامه‌ریزی عددصحیح قابل ملاحظه و به طور میانگین حدود ۵۳ درصد بوده است.

جهت مقایسه جواب‌های حاصل از مدل پیشنهادی و اعتبارسنجی نتایج، از برنامه زمانبندی تهیه شده در راه‌آهن ج.ا.ا استفاده می‌شود. گراف حرکت برنامه‌ای قطارها در مسیر دوخطه تهران-محمدیه

جدول۷. نتایج حل نمونه مسائل تصادفی با ابعاد بزرگ با فرض مشخص بودن توالی اعزام قطارها

شماره مسئله	CPLEX	CPLEX	نامساویهای معتبر+CPLEX	درصد کاهش زمان حل
	مقدار بهینه تابع هدف (دقیقه)	زمان حل(ثانیه)	زمان حل(ثانیه)	از بکارگیری نامساویهای معتبر
۳۱	۱۰۵۷	۵۰۵,۰۵	۳۹۷,۹۶	٪۲۱,۲۰
۳۲	۱۲۸۷	۷۲۸,۷۳	۷۰۴,۷	٪۳,۳۰
۳۳	۱۳۳۵	۴۵۶,۶۹	۲۹۱,۰۴	٪۳۶,۲۷
۳۴	۱۳۳۲	۵۳۵,۳۵	۲۲۰,۵۵	٪۵۸,۸۰
۳۵	۱۰۵۷	۱۰۲,۳۷	۸۲,۵۳	٪۱۹,۳۸
۳۶	۱۳۲۶	۵۰۴,۳	۴۸۳,۲۶	٪۴,۱۷
۳۷	۱۵۳۱	۱۴۵,۶۳	۱۱۲,۹۸	٪۲۲,۴۲
۳۸	۱۵۷۷	۱۲۵,۸۵	۱۰۸,۳۹	٪۱۳,۸۷
۳۹	۱۷۰۸	۱۲۱,۷	۱۰۱,۶۲	٪۱۶,۵۰
۴۰	۱۷۰۱	۲۴۵,۸۶	۲۱۷,۷۲	٪۱۱,۴۵
۴۱	۱۴۵۰	۱۴۸۳,۳۸	۶۵۲,۲۷	٪۵۶,۰۳
۴۲	۱۶۳۷	۸۸۶,۰۲	۵۷۳,۸۵	٪۳۵,۲۳
۴۳	۱۴۹۳	۵۳۵۶,۳	۵۲۶۲,۱۳	٪۱,۷۶
۴۴	۱۷۹۳	۳۰۲۰,۴۸	۱۹۷۹,۵۷	٪۳۴,۴۶
۴۵	۱۵۳۵	بیش از ۲ ساعت	۵۹۳۰,۸	N
میانگین		۱۰۱۵,۵۵	۷۹۹,۱۸	٪۲۳,۹۲
انحراف استاندارد		۱۴۶۸,۰۸	۱۳۷۳,۷۳	٪۱۸,۱۶

جدول۸. تعداد قطارها در کلاس های سرعت در مسیرهای تهران-محمدیه و تهران-گرمسار

تعداد قطارها در هر کلاس سرعت	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳	کلاس ۴	کلاس ۵
مسیر تهران-محمدیه	۲	۱	۲۴	۱	۲
مسیر تهران-گرمسار	۲	۱۵	۲	۲	-

جدول۹. اطلاعات ایستگاههای مسیر تهران- محمدیه

شماره ایستگاه	تعداد کل خطوط	تعداد سکوها	زمان اذان صبح	انتهای بازه اقامه نماز صبح	زمان اذان ظهر	انتهای بازه اقامه نماز ظهر/عصر	زمان اذان مغرب	انتهای بازه اقامه نماز مغرب/عشاء
تهران	۲	۲	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
تپه سفید	۲	۱	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
اسلامشهر	۲	۲	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
فرودگاه	۲	۲	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
نمکزار	۲	۲	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
محمدیه	۲	۱	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰

جدول۱۰. اطلاعات زمانهای سیر در بلاک‌های مسیر تهران- محمدیه

بلاک/ زمانهای سیر (دقیقه)	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳	کلاس ۴
تهران- تپه سفید	۲۴	۳۱	۳۱	۳۲
تپه سفید- اسلامشهر	۲۴	۳۱	۳۱	۳۳
اسلامشهر- فرودگاه	۱۳	۱۷	۱۷	۱۷
فرودگاه- نمکزار	۱۰	۱۵	۱۵	۱۵
نمکزار- محمدیه	۱۲	۱۴	۱۵	۱۵

جدول۱۱. اطلاعات ایستگاههای مسیر تهران- گرمسار

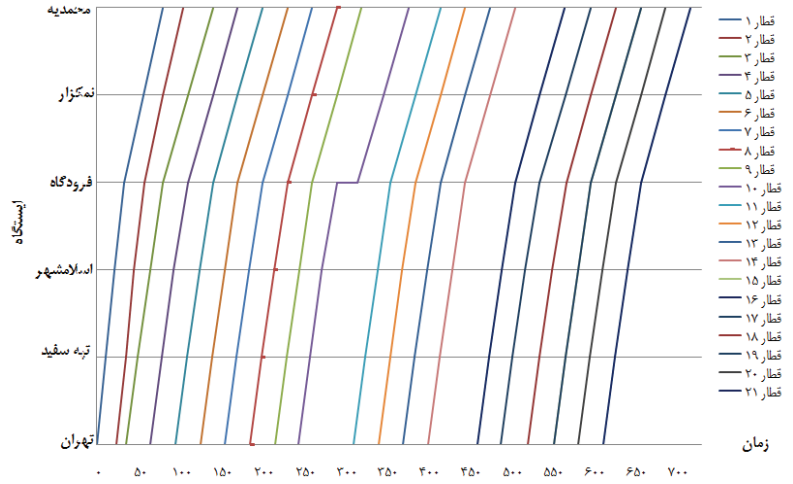
شماره ایستگاه	تعداد کل خطوط	تعداد سکوها	زمان اذان صبح	انتهای بازه اقامه نماز صبح	زمان اذان ظهر	انتهای بازه اقامه نماز ظهر/عصر	زمان اذان مغرب	انتهای بازه اقامه نماز مغرب/عشاء
تهران	۹	۹	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
ری	۲	۱	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
بهرام	۳	۳	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
ورامین	۲	۲	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
پیشوا	۴	۳	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
ابردژ	۲	۱	۴:۳۰	۵:۱۵	۱۲:۰۰	۱۴:۰۰	۱۸:۳۰	۲۰:۳۰
کویر	۲	۱	۴:۳۵	۵:۲۰	۱۲:۰۵	۱۴:۰۵	۱۸:۳۵	۲۰:۳۵
گرمسار	۵	۳	۴:۳۵	۵:۲۰	۱۲:۰۵	۱۴:۰۵	۱۸:۳۵	۲۰:۳۵

جدول۱۲. اطلاعات زمانهای سیر در بلاک‌های مسیر تهران- گرمسار

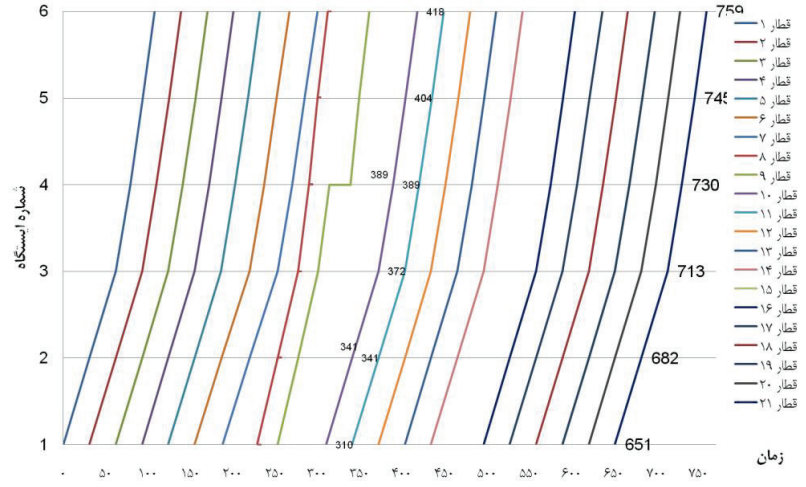
بلاک/ زمانهای سیر (دقیقه)	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳	کلاس ۴	کلاس ۵
تهران- ری	۱۰	۱۰	۱۳	۱۳	**۱۳**
ری- بهرام	۷	۷	۱۳	۱۳	**۱۳**
بهرام- ورامین	۸	۸	۱۳	۱۴	**۱۴**
ورامین- پیشوا	۵	۵	۸	۹	**۹**
پیشوا- ابردژ	۶	۷	۹	۹	**۹**
ابردژ- کویر	۱۰	۱۰	۱۴	۱۴	**۱۴**
کویر-گرمسار	۱۲	۱۲	۱۶	۱۶	**۱۶**

جدول۱۳.حل مسائل برنامه‌ریزی عددصحیح

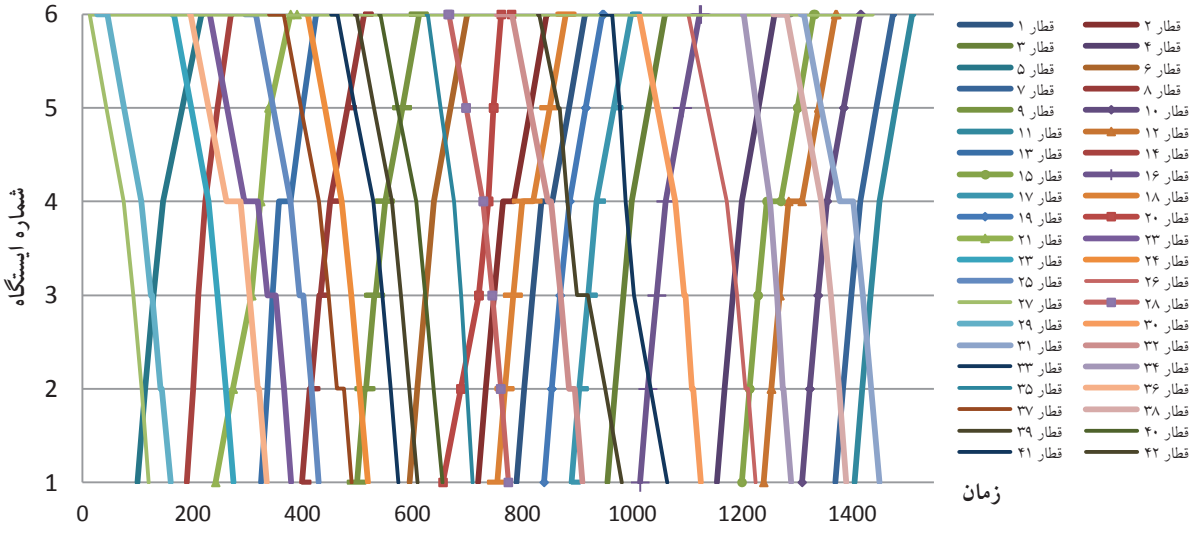
مسئله	m	n	CPLEX	CPLEX	نامساویهای معتبر+CPLEX	درصد کاهش زمان حل بانامساویهای معتبر
			مقدار بهینه تابع هدف (دقیقه)	زمان حل(ثانیه)	زمان حل(ثانیه)	
تهران–محمدیه	۶	۲۱	۷۱۷	۲,۵	۲,۲	٪۱۲,۰۰
محمدیه- تهران	۶	۲۱	۷۵۹	۱,۷۶	۰,۹۸	٪۴۴,۳۲
تهران -گرمسار	۸	۳۰	۵۵۵	۶۶۴,۵۲	۶۸,۱۳	٪۸۹,۷۵
گرمسار- تهران	۸	۳۰	۵۷۹	۴۰۴,۰۷	۱۲۴,۱۳	٪۶۹,۲۸
میانگین					۲۶۸,۲۱	۴۸,۸۶



شکل٤. گراف ایستگاه - زمان جواب بهینه برای مسیر تهران-محمدیه



شکل٥. گراف ایستگاه - زمان جواب بهینه برای مسیر محمدیه- تهران



شکل٦. گراف حرکت برنامه‌ای تهیه شده در مسیر دوخطه تهران-محمدیه در راه‌آهن ج.ا.ا

در شکل ۶ نشان داده شده است. از دیدگاه حداکثر بهره‌برداری از ظرفیت تئوری خطوط، جواب‌های بهینه حاصل از مدل برنامه‌ریزی عددصحیح، به ترتیب برای مسیر رفت و بازگشت تهران–محمدیه در حدود ۹۷,۸۴ درصد و ۹۱,۰۴ درصد نسبت به وضعیت فعلی در راه‌آهن ج.ا.ا، بهبود یافته‌اند. بهبود حاصل شده به دلیل یافتن توالی بهینه اعزام قطارها از مبدا و مقصد مسیر و تعیین مناسب ایستگاههای توقف برای اقامه نماز است.

۷. جمع‌بندی و پیشنهاد تحقیقات آتی

با توجه به هزینه‌های بسیار زیاد احداث خطوط ریلی جدید، بکارگیری روشهای مناسب جهت تحلیل حداکثر ظرفیت خطوط ریلی و استفاده بهینه از ظرفیت موجود بدون نیاز به احداث خطوط جدید، در اولویت قرار دارد.

در این تحقیق، یک مدل برنامه‌ریزی عددصحیح برای تولید برنامه زمانبندی عملیاتی با هدف بیشترین بهره‌برداری از ظرفیت زیرساخت‌های ریلی در یک محور دوخطه ارائه شد. مدل زمانبندی ارائه شده شامل متغیرهای توالی اعزام قطارها، سرفاصله بین اعزام قطارهای متوالی، تخصیص قطارها به خطوط و سکوهای ایستگاهها و همچنین برنامه توقف قطارها در بازه‌های افق شرعی است. برای کاهش زمان حل مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح چندین دسته نامساویهای معتبر ارائه شد.

جهت بررسی کاربرد مدل برنامه‌ریزی عددصحیح ارائه شده، تعدادی نمونه مسئله تصادفی در ابعاد کوچک، متوسط و بزرگ تولید شده و به کمک نرم افزار CPLEX حل شد. بکارگیری نامساویهای معتبر در نرم افزار CPLEX تنها در مسائل با ابعاد کوچک و متوسط $(n \leq 20, m \leq 25)$ قادر به حل مسائل در زمانی کمتر از ۲ ساعت بود. اما نرم افزار CPLEX برای مسائل با ابعاد بزرگ تر، قادر به یافتن جواب بهینه در زمان پذیرفتنی نیست. در حالت خاصی که توالی اعزام قطارها مشخص باشد، نرم افزار CPLEX قادر به یافتن جواب بهینه مسئله در مسائلی در ابعاد بزرگ $(20 < n \leq 30, 25 < m \leq 40)$ است.

با توجه به اینکه در عمل، توالی اعزام قطارها به دلیل محدودیت‌های زمان اعزام، تا حدودی از قبل تعیین شده است، بنابراین، مدل برنامه‌ریزی عددصحیح ارائه شده، دارای کاربرد عملی در تعیین سایر متغیرهای برنامه زمانبندی شامل برنامه توقف قطارها، فاصله بین اعزام های متوالی و تخصیص قطارها به خطوط ایستگاهها است. اما از طرفی استفاده از روش‌های دقیق برای حل مسائل زمانبندی حرکت قطارها در ابعاد واقعی در حالتی که توالی اعزام قطارها متغیر تصمیم مسئله باشد، کارآیی لازم را نداشته و استفاده از روشهای تقریبی و فراابتکاری گزینه عملی است. دو مسیر تهران– گرمسار و تهران– محمدیه نی‌ز به عنوان مطالعات موردی برای ارزیابی مدل برنامه‌ریزی عددصحیح و محاسبه تاثیر نامساویهای معتبر در کاهش زمان حل دقیق مسئله انتخاب شدند.

یکی از زمینه های مهم تحقیقاتی آتی می‌تواند در نظر گرفتن شرایطی باشد که باعث وابستگی زمانبندی قطارهای رفت و برگشت در مسیرهای دوخطه می‌شود. یکی از این فرضیات، امکان مسدودی بلاکهای دوخطه است. در شرایطی که یکی از بلاکهای مسیر مسدود باشد، آنگاه بلاک دوخطه مشابه به یک بلاک تک‌خطه عمل کرده و جریان قطارهای رفت و بازگشت روی آن انجام می‌شود. بنابراین، در این حالت جریان قطارهای رفت و برگشت به هم وابسته می‌شود. در نتیجه در تحقیقات آتی می‌توان زمانبندی قطارهای رفت و بازگشت را در مسیرهای دوخطه در یک مدل به طور یکپارچه انجام داد. از زمینه های تحقیقاتی آتی می‌توان به ارائه یک برنامه زمانبندی دوره‌ای در تعیین ظرفیت عملی خطوط ریلی اشاره کرد.

ارائه یک برنامه زمانبندی دوره ای، معیار مناسب‌تری در بررسی ظرفیت خطوط ریلی ارائه می‌کند. همچنین مدل برنامه‌ریزی عددصحیح ارائه شده، قابل تعمیم به حالت شبکه ریلی بوده و

از آن می‌توان در تعیین حداکثر ظرفیت عملی یک شبکه ریلی استفاده کرد. از دیگر زمینه‌های تحقیقاتی آتی می‌توان به استفاده از روش‌های فراابتکاری و همچنین ارائه روش‌های تعیین کران پایین برای حداکثر ظرفیت عملی در مسیرهای ریلی دوخطه اشاره کرد. به دلیل دشواریهای یافتن جواب دقیق در مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی برای مسئله تعیین ظرفیت عملی، به دست آوردن کران پایین از اهمیت بالایی برخوردار است.

۸. پی نوشت‌ها

1- Theoretical Capacity
2- Practical Capacity
3- International Union of Railways
4- Time-Space Network
5- Hybrid Job Shop
6- Shifting Bottleneck Procedure
7- Tabu Search
8- Simulated Annealing
9- Best-Insertion-Heuristic
10- Hyper graph model
11- Multi commodity flow problem
12- Ant colony optimization
13- Greedy randomized adaptive search procedure
14- Variable neighborhood search
15- Headway
16- Flexible Flow Shop
17- No-wait
18- Machine Eligibility Restrictions
19- Independent Operation
20- Valid Inequality

۹. مراجع

- جمیلی، امین و کیانفر، فریدون (۱۳۸۸) "زمانبندی حرکت قطارها به کمک روش فوق ابتکاری عملیات حرارتی شبیه‌سازی شده". نشریه پژوهشنامه حمل ونقل، سال ششم، شماره یک، ص ۱۳-۲۷.

- جمیلی، امین (۱۳۹۰) "زمانبندی دوره ای استوار در برابر اغتشاش حرکت قطارها و تعیین ظرفیت زیرساختهای خطوط ریلی"، پایان نامه دکتری، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت.

- حسن نایبی، عرفان (۱۳۹۰) "تعیین توالی اعزام و برنامه توقف قطارها در مسیرهای ریلی دوخطه به کمک الگوریتمهای جستجوی تصادفیِ تطابقیِ حریصانه و جستجوی همسایگی متغیر". پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف، تهران.

- خادم ثامنی، ملودی (۱۳۸۶) "زمانبندی حرکت قطارها در مسیرهای دوخطه". پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

- سپهری، محمدمهدی و پورسید آقایی، محسن (۱۳۷۸) "رنامه‌ریزی حرکت قطارها در خطوط یک خطه"، نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۳، شماره ۲، ص ۸۷-۹۷.

- شفاهی، یوسف و صادقی، نازنین (۱۳۸۳) "یک مدل شبیه سازی برای زمانبندی حرکت قطارها با هدف افزایش قابلیت اطمینان برنامه زمانبندی "، هفتمین همایش حمل‌ونقل ریلی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف.

- شفاهی، یوسف و فندرسکی، علیرضا (۱۳۸۲) "زمان بندی همزمان حرکت قطارها و تعمیر و نگهداری خطوط راه‌آهن "، ششمین کنفرانس بین المللی مهندسی عمران.

- شفاهی، یوسف و عابدینی، ایمان (۱۳۸۳) "زمانبندی حرکت قطارها با استفاده از یک روش ابتکاری جستجوی مبتنی بر منع "، هفتمین همایش حمل‌ونقل ریلی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف.

- شفاهی، یوسف و عزیزخانی، علیرضا (۱۳۸۳) "زمانبندی حرکت قطارها با روشی ابتکاری مبتنی بر الگوریتم ژنتیک "، هفتمین همایش حمل‌ونقل ریلی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف.

- قاسم پور، شیما و رادفر، الهام (۱۳۸۸) "شبیه سازی حرکت قطار با استفاده از شبکه های پیشرفته پتری و مدلهای بهینه سازی"، دومین کنفرانس بین المللی پیشرفتهای اخیر در مهندسی راه‌آهن، تهران.

- قصیری، کیوان و مرشد سلوک، فهیمه (۱۳۸۴) "ارائه یک مدل ابتکاری مبتنی بر سیستم اجتماع مورچه ها برای حل مسئله زمانبندی حرکت قطارها"، پژوهشنامه حمل ونقل، سال دوم، شماره چهار، ص ۲۵۷ تا ۲۷۰.

- یقینی، مسعود و محمدزاده، علی (۱۳۹۰) "یک مدل زمانبندی حرکت قطارها با در نظر گرفتن زمانهای توقف برای نماز". نشریه تخصصی مهندسی صنایع، دوره ۴۵ ، شماره ۱ ، ص ۱۰۳ تا ۱۱۶.

- یقینی، مسعود و نیکو، نریمان (۱۳۹۰) "ارائه مدل بهینه سازی برای تولید جدول زمانبندی فشرده حرکت قطارها و محاسبه ظرفیت برای راه‌آهن‌های شهری و برون شهری" . یازدهمین کنفرانس بین المللی حمل ونقل و ترافیک.

- Abril, M., Barber, F., Ingolotti, L., Salido, M.A., Tormos, P. and Lova, A. (2008) "An assessment of railway capacity", Transportation Research Part E, Vol. 44, pp. 774–806.

- Bendfeldt, J- P, Mohr, U. and Muller, L. (2000) "Rail-Sys, a system to plan future railway needs", Computer in railways VII, pp 249–255.

- Burdett, R. L. and Kozan, E. (2006) "Techniques for absolute capacity determination in railways", Transportation Research Part B 40, pp.616–632.

- Burdett, R. L. and Kozan, E. (2010) "A disjunctive graph model and framework for constructing new train schedules", European Journal of Operation Research, Vol. 200, No. 1, pp. 85-98

- Burdett, R. L. and Kozan, E. (2009) "Techniques for restricting multiple overtaking conflicts and performing compound moves when constructing new train schedules", Mathematical Computer Modeling, Vol. 50, pp. 314–328.

- Burdett, R. L. and Kozan, E. (2010) "A sequencing approach for creating new train timetables", OR Spectrum, Vol. 32, pp. 163–193.

- Caprara, A., Fischetti, M. and Toth, P. (2002) "Modeling and solving the timetabling problem", Operations Research, Vol. 50, No. 5. pp. 851-861.

- Harrod, S. (2009) "Capacity factors of a mixed speed railway network, Harrod, Steven", Transportation Re-

search Part E 45 (2009), pp. 830–841.

- Kroon, L. G., Dekker, R. and Vromans, M. J. C. M. (2005) "Cyclic railway timetabling: a stochastic optimization approach", Technical Report ERS-2005-051-LIS, Erasmus University Rotterdam.

- Krueger, H., Farrington, P. A., Black Nembhard, H., Sturrock, D.T. and Evans, G.W. (1999) "Parametric modeling in rail capacity planning", WSC'99. Winter Simulation Conference Proceedings.

- Liebchen, C. (2006) "Periodict timetable optimization in public transport", Ph.D. dissertation, Technische Universitat Berlin.

- Liu, S. Q. and Kozan, E. (2009) "Scheduling trains as a blocking parallel-machine job shop scheduling problem", Computers & Operations Research, Vol. 36, pp. 2840-2852.

- Liu, S. Q. and Kozan, E. (2010) "Scheduling trains with priorities: A no-wait blocking parallel-machine job-shop scheduling model", INFORMS, pp. 1–24.

- Pena, M., Ramos, A., Fernandez, A. and Cucala, A. P. (2010) "Train timetabling problem for complex railway system", Institute for Research in Technology, Comillas Pontifical University.

- Pinedo, M. (2008) "Scheduling, theory, algorithms and systems", 3rd. Eidtion, Prentice Hall.

- Şahin, G., Ahuja, R .K. and Cunha, C. B. (2008) "Integer programming based solution approaches for the train dispatching problem", Journal of Industrial Management and Optimization.

- Zhou, X. and Zhong, M. (2005) "Bi-criteria train scheduling for high-speed passenger railroad planning applications", European Journal of Operation Research, Vol. 167, pp. 752–771.

۱۰. پیوست‌ها

در این بخش، اثبات نامساویهای معتبر ارائه شده در مدل برنامه‌ریزی عددصحیح تشریح می‌شود.

۱۰-۱ اثبات نامساوی معتبر (۲۸)

اگر قطار sام در توالی در ایستگاه iام در بازه افق شرعی pام توقف داشته باشد، آنگاه داریم :

$$L_{pi} \le c_{is} \le U_{pi} - s_{pi} \qquad (۳۹)$$

به کمک رابطه زیر می‌توان نشان داد که قطار sام در توالی، در بازه افق شرعی p+۱ام در ایستگاه i-۱ام نمی‌تواند توقف داشته باشد، زیرا زمان رسیدن قطار به ایستگاه، قبل از ابتدای بازه افق شرعی است.

$$c_{i-1,s} \le d_{i-1,s} < c_{is} + s_{pi} \le U_{pi} < L_{p+1,i-1} \rightarrow \qquad (۴۰)$$
$$c_{i-1,s} < L_{p+1,i-1} \rightarrow g_{p+1,i-1,s} = 0$$

به همین ترتیب برای تمام ایستگاههای قبل از ایستگاه iام، امکان

توقف قطار sام در بازه افق شرعی p+۱ام وجود نخواهد داشت.

۱۰-۲- اثبات نامساوی معتبر (۲۹)

اگر قطار در توالی sام ملزم به توقف در بازه‌های افق شرعی نمازهای pام و p+۲ام شده باشد آنگاه روابط (۴۳) الی (۴۶) برقرار است. روابط (۴۳) و (۴۴) نیز مربوط به بازه افق شرعی pام و روابط (۴۵) و (۴۶) مربوط به بازه افق شرعی p+۲ام هستند.

$$\begin{cases} d_{1s} \le L_{p1} + t_p & (۴۱) \\ c_{ms} \ge U_{pm} - t_p & (۴۲) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{1s} \le L_{p+2,1} + t_{p+2} & (۴۳) \\ c_{ms} \ge U_{p+2,m} - t_{p+2} & (۴۴) \end{cases}$$

حال باید نشان دهیم که با توجه به شرایط بالا، دو شرط زیر نیز برقرار است:

$$\begin{cases} \mathrm{d_{1s}} \le \mathrm{L_{p+1,1}} + \mathrm{t_{p+1}} & (۴۵) \\ \mathrm{c_{ms}} \ge \mathrm{U_{p+1,m}} - \mathrm{t_{p+1}} & (۴۶) \end{cases}$$

به کمک روابط (۴۹) و (۵۰) بین زمانهای افق شرعی، می‌توان به سادگی صحت برقراری روابط (۴۷) و (۴۸) را نشان داد.

۱۰-۳- اثبات نامساویهای معتبر (۳۰) الی (۳۳)

با توجه به رابطه، اگر زمان اعزام قطار sام از مبدا بعد از ابتدای زمان افق شرعی ایستگاه مبدا باشد، آنگاه زمان اعزام قطار s+۱ام هم بعد از ابتدای زمان افق شرعی ایستگاه مبدا بوده و لذا متغیر $\tau_{p,s+1}$ برابر صفر خواهد بود.

$$\begin{cases} L_{pi} + t_p < L_{pi} < L_{p+1,i} + t_{p+1}, & \forall i,\ 1 \le p \le H-1. \quad (۴۷) \\ U_{p+1,i} - t_{p+1} > L_{p+1,i} > U_{pi} - t_p, & \forall i,\ 1 \le p \le H-1. \quad (۴۸) \end{cases}$$

اثبات روابط (۳۱) الی (۳۳)، مشابه اثبات رابطه (۳۰) بوده و از روی ارتباط بین زمان اعزام قطارهای متوالی از مبدا و زمان رسیدن قطارهای متوالی به مقصد، به سادگی قابل بیان است.

$$d_{1,s+1} > d_{1s} > L_{p1} + t_p \quad (۴۹)$$

۱۰-۴- اثبات نامساویهای معتبر (۳۴) الی (۳۷)

با توجه به رابطه (۵۲)، اگر زمان اعزام قطار sام از مبدا، بعد از ابتدای زمان افق شرعی ایستگاه مبدا باشد، آنگاه زمان اعزام این قطار نیز بعد از ابتدای بازه افق شرعی p−۱ام خواهد بود و لذا متغیر $\tau_{p-1,s}$ برابر صفر خواهد شد.

$$d_{1s} > L_{p1} + t_p > L_{p-1,1} > L_{p-1,1} + t_{p-1} \quad (۵۰)$$

استدلال بکاررفته در اثبات نامساوی (۳۴) عینا برای روابط (۳۵) الی (۳۷)، برقرار است.