

بهینه‌سازی زمان‌بندی حرکت و توقف قطارهای مترو با استفاده از الگوریتم NSGA-II برای کاهش زمان سفر و افزایش کارایی اقتصادی و زیست‌محیطی سیستم

محمد رضا ساحل‌گزین (مسئول مکاتبات)، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده نقشه برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی،
تهران، ایران

عباس علی‌محمدی، دانشیار، دانشکده نقشه برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

Email: sahelgozin@mail.kntu.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۵/۰۴/۲۰

دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۰۲

چکیده

در طراحی و توسعه سیستم‌های حمل‌ونقل عمومی مانند راه‌آهن شهری، علاوه بر طراحی مسیر شبکه و مکان ایستگاه‌ها، ارائه زمان‌بندی حرکت ناوگان نیز مرحله‌ای از طراحی است. در زمان‌بندی مترو، جدا از فاصله زمانی میان ورود دو قطار متوالی به ایستگاه‌ها، متغیرهایی مانند مدت‌زمان شتاب‌گیری قطارها در شروع حرکت بین دو ایستگاه، اندازه شتاب حرکت آنها، مدت‌زمان ترمز گرفتن آنها در پایان حرکت بین دو ایستگاه، اندازه شتاب آنها در هنگام ترمز و مدت‌زمان توقف آنها در ایستگاه‌ها، تأثیر بسزایی در معیارهای زمان‌بندی مانند مدت‌زمان سفر مسافران، هزینه‌های شرکت بهره‌برداری مترو و انرژی مصرف شده توسط قطارها دارد. از آنجایی که معیارهای مذکور در تضاد با یکدیگر هستند، در این مطالعه سعی شده است با استفاده از الگوریتم NSGA-II، بهینه‌سازی زمان‌بندی حرکت و توقف قطارهای خط ۱ متروی تهران انجام گیرد. برای این کار، پس از مدل‌سازی مسئله و طراحی توابع هدف بهینه‌سازی مطابق با معیارهای موردنظر در طراحی، راه‌حل‌های واقع در سطح پارتو مسئله به دست آمد. به علت تعداد زیاد راه‌حل‌ها، با استفاده از تحلیل K-Means خوشه‌بندی راه‌حل‌ها صورت گرفت و مراکز خوشه‌ها به عنوان راه‌حل‌های کاندید که در اختیار مدیر تصمیم‌گیرنده قرار می‌گیرد، مشخص شد. با بررسی نتایج به دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت که روش ارائه شده در این تحقیق، مجموعه‌ای از راه‌حل‌های متنوع را در اختیار تصمیم‌گیرنده می‌گذارد که وی می‌تواند بسته به اهمیت هر کدام از سه معیار زمان، هزینه و انرژی مصرف‌شده، در شرایط مختلف راه‌حل ترجیح داده شده را برگزیند. در مرحله آخر، با مقایسه توابع هدف به ازای راه‌حل‌های کاندید با زمان‌بندی کنونی، راه‌حل ترجیح داده شده انتخاب شد. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که بکارگیری این راه‌حل در مقایسه با زمان‌بندی کنونی، زمان سفر مسافران و هزینه ناشی از خالی ماندن ظرفیت قطارها را به ترتیب تا ۷/۱۶٪ و ۵/۱۳٪ درصد کاهش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: زمان‌بندی مترو، بهینه‌سازی چندهدفه، الگوریتم NSGA-II، تحلیل K-Means

پیش‌بینی تر و قابل اعتمادتر از سفر درون شبکه خیابان‌هاست.

بنابراین مترو در کلان‌شهر تهران جایگاه ویژه‌ای دارد که افزایش کیفیت سرویس‌دهی آن مهم به نظر می‌رسد و طراحی و توسعه سیستم‌های مترو با هدف افزایش کیفیت سرویس‌دهی باید به نحوی صورت پذیرد که هم رضایت مشتریان و مسافران را افزایش دهد و هم رضایت مدیران مسئول مترو را در نظر بگیرد. در طراحی و توسعه سیستم‌های حمل‌ونقل عمومی مانند راه آهن شهری، علاوه بر طراحی مسیر شبکه و مکان ایستگاه‌ها، ارائه زمان‌بندی حرکت ناوگان نیز مرحله‌ای از طراحی است.

جدول زمان‌بندی حرکت قطارها به عنوان عاملی تأثیرگذار بر میزان رضایت مشتریان، هزینه‌های بهره‌برداری مترو و همچنین سلامت محیط زیست اهمیت دارد و بنابراین ایجاد تغییرات در آن، کیفیت سرویس‌دهی را تغییر می‌دهد. این امر در مطالعات صورت گرفته شده تأکید شده است. یانگ و همکارانش، برای حصول اطمینان از بهره‌وری و اثربخشی سرویس‌دهی در سیستم‌های مترو، یک جدول زمان‌بندی مطلوب را بسیار مهم می‌دانند [Yang et al. 2014]. علاوه بر هزینه‌های شرکت بهره‌برداری مترو و رضایت مشتریان، نصری و همکارانش تأکید دارند که اگرچه مهم‌ترین خصوصیت برنامه‌ریزی زمان در حرکت قطارهای سیستم‌های زیرزمینی مترو، دقیق بودن در حمل‌ونقل رضایت‌بخش برای مسافران است، اما می‌توان نشان داد که انرژی الکتریکی مصرف شده علاوه بر سایر خصوصیات می‌تواند با طراحی مناسب جدول‌های زمانی حرکت قطارها بهینه شود [Nasri, Moghaddam and Mokhtari. 2010].

در زمان‌بندی، علاوه بر فاصله زمانی میان ورود دو قطار متوالی به ایستگاه‌ها، متغیرهایی مانند مدت‌زمان شتاب‌گیری قطارها در شروع حرکت بین دو ایستگاه، اندازه شتاب حرکت آنها، مدت‌زمان ترمز گرفتن آنها در پایان حرکت بین دو ایستگاه، اندازه شتاب آنها در هنگام ترمز و مدت‌زمان توقف آنها در ایستگاه‌ها، نقش بسزایی در مدت‌زمان سفر مسافران، هزینه‌های شرکت بهره‌برداری مترو و انرژی مصرف شده توسط قطارها دارد. افزایش یا کاهش هر کدام از این متغیرها می‌تواند در میزان رضایت مسافران و هزینه‌های شرکت بهره‌برداری مترو و انرژی مصرف شده به عنوان معیارهای طراحی زمان‌بندی تأثیرگذار باشد.

امروزه با افزایش فاصله محل زندگی افراد، با مراکز اشتغال و ارائه خدمات و سرویس‌ها مانند آموزش، تفریح، خرید، سلامت و غیره نیاز به سفرهای روزانه افزایش یافته است. سرویس‌دهی برای این حجم بالای سفر، نیازمند بسترهای مناسب سیستم‌های حمل‌ونقل است. عدم تناسب ظرفیت شبکه راه‌ها با حجم بالای سفر، توسعه سیستم‌های حمل‌ونقل عمومی را به عنوان جایگزینی برای خودروهای شخصی امری ضروری می‌کند. در این بین، محدودیت در افزایش ظرفیت شبکه راه‌ها و همچنین ظرفیت کمتر تاکسی و اتوبوس نسبت به سیستم‌های حمل‌ونقل ریلی درون شهری، توجه مدیران و سیاست‌گذاران شهری را بیشتر معطوف توسعه زیرساخت‌های شبکه‌های حمل‌ونقل ریلی درون‌شهری کرده است.

از دیدگاه کلان و مدیریتی، این سیستم‌ها، از حیث مسائلی که در درازمدت می‌توانند بر از بین رفتن منابع کشور تأثیر بگذارند و یا هزینه‌های عمومی را افزایش دهند، مقرون به صرفه‌تر به نظر می‌رسند. به عنوان مثال قطار مترو در مصرف انرژی ۴/۲۳ برابر بیشتر از کامل‌ترین خودرو با بهینه‌ترین مصرف سوخت کارایی دارد [Yang et al. 2013]. علاوه بر آن، امروزه به علت مشکلاتی مانند آلودگی صوتی و هوا، ترافیک سنگین در بزرگراه‌ها و خیابان‌ها و هزینه بالای انرژی، تمایل بیشتری به استفاده از سیستم‌های ریلی برقی زیرزمینی به جای سایر سیستم‌های حمل‌ونقل وجود دارد [Nasri Moghaddam and Mokhtari, 2010]. از طرف دیگر، از دیدگاه فردی، مسافران ترجیح می‌دهند با هزینه کمتر و سرعت بیشتر به مقصد خود برسند؛ به عبارتی دسترسی آنها به فعالیت یا سرویسی که در مقصد آنها ارائه می‌شود، افزایش یابد. از این نظر نیز در شهری مانند تهران، به نظر می‌رسد مترو کارآمدتر از سایر وسایل نقلیه مانند اتوموبیل شخصی و حتی سیستم‌های حمل‌ونقل عمومی مانند اتوبوس شهری و تاکسی باشد. نبودن موانعی همچون چراغ راهنمایی و یا ترافیک باعث می‌شود که در شلوغ‌ترین ساعات نیز قطارهای مترو در یک زمان مشخص (صرف نظر از مقداری تأخیر در سوار و پیاده شدن مسافران در ساعات اوج سفر) به ایستگاه پایانی برسند و بنابراین سفر با مترو از این نظر قابل

توابع هدف متناظر با این معیارها در روند بهینه‌سازی در تضاد با یکدیگر هستند. یکی از روش‌های برخورد با این مسائل، استفاده از الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه^۲ است که مبنای کار آنها جواب‌های غیرمغلوب^۳ واقع در سطح پارتو^۴ است. در رابطه با کارایی روش‌های بر مبنای مفاهیم پارتو، چانگ و خوان در مطالعه خود بیان کرده‌اند پیاده‌سازی روش‌هایی که بر اساس سطح پارتو نیستند، مانند مجموع وزنی^۵، برای حل مسئله بهینه‌سازی زمان‌بندی قطار دشوار است؛ به این دلیل که میان معیارها یک مقیاس یکسان وجود ندارد و همین امر سبب مشکلاتی در اختصاص یک وزن مناسب می‌شود [Chang and Kwan, 2004].

در بهینه بودن مدت‌زمان توقف و حرکت قطارها، جمعیت ورودی و خروجی ایستگاه‌ها نیز نقش بسزایی در میزان رضایت‌بخش بودن سرویس‌دهی دارد. در همین باره، چن و وی جریان جمعیت را، ورودی تأثیرگذاری در مدیریت حمل‌ونقل و در تمام مراحل برنامه‌ریزی حمل‌ونقل، ساختمان زیرساخت‌های حمل‌ونقل، توسعه و بهبود امکانات، برنامه‌ریزی عملکرد و زمان‌بندی سیستم و همچنین مدیریت سوددهی سیستم می‌دانند [Chen and Wei, 2011].

در این مطالعه، سعی بر آن است تا با استفاده از الگوریتم NSGA-II، و با در نظر گرفتن نرخ جمعیت ورودی و خروجی ایستگاه‌ها در واحد زمان، بهینه‌سازی حرکت قطارها در فاصله بین دو ایستگاه و مدت‌زمان توقف آنها در ایستگاه‌ها انجام شود. با توجه به اثبات کارایی الگوریتم ژنتیک در مطالعات پیشین با صورت مسئله مشابه با تحقیق حاضر مانند [Nasri et al. 2010] و [Chen, Lin and Liu, 2005] و همچنین تأکید مطالعاتی مانند [Khoshamooz, 2011] بر کارایی روش‌های جمعیت-مبنا به عنوان یکی از راه‌های برخورد با مسائل چندهدفه، الگوریتم ژنتیک برای این مطالعه انتخاب شده است. از طرفی با توجه به طیف وسیع کاربردهای الگوریتم NSGA-II به عنوان توسعه‌ای از الگوریتم ژنتیک برای بکارگیری در کاربردهای مختلف مهندسی در حل مسائل چندهدفه، در این مطالعه از این الگوریتم به جای ژنتیک استفاده شده است. خط (۱) متروی تهران به عنوان مورد مطالعاتی در نظر گرفته شده است. در مسئله

از یک سو ایجاد تغییر در متغیرهای مذکور، می‌تواند با بهبود کیفیت یکی از معیارها، منجر به از دست رفتن کیفیت سایر معیارها شود. این فرض بر اساس دو موضوع زیر شکل گرفته است: اولاً در این تحقیق برای مدلسازی مسئله، ابتدا یک چارچوب مفهومی ایجاد شده است. این چارچوب مفهومی برگرفته از تئوری حمل و نقل پایدار است. حمل و نقل پایدار که بر اساس توسعه پایدار شکل گرفته، همانند آن دارای سه مولفه است. این سه مولفه عبارتند از: مولفه اقتصادی، مولفه اجتماعی و مولفه زیست‌محیطی که در این تحقیق به ترتیب با معیارهای مدت‌زمان سفر مسافران، هزینه‌های شرکت بهره‌برداری مترو و انرژی مصرف شده توسط قطارها بیان شده‌اند. با استناد به تحقیقات پیشین، ماهیت حمل و نقل پایدار به گونه‌ای است که سیاست‌گذاری‌های مختلف و یا توسعه سیستم‌های حمل و نقل اگر به گونه‌ای باشد که باعث بهبود کیفیت یکی از این مولفه‌ها باشد، در حداقل یکی دیگر از این مولفه‌ها دارای کاهش کیفیت خواهد بود. این امر در مسئله مورد تحقیق مطالعات پیشین اشاره شده در این تحقیق به وضوح مشخص است. دوما در چارچوب مفهومی پیاده شده در این تحقیق، سه مولفه حمل و نقل پایدار به عنوان اجزای اصلی چارچوب ارائه شده‌اند. تمامی پارامترهای مدل در این سه جزء دسته‌بندی شده و ارتباط بین این پارامترها بر یکدیگر استخراج شده‌اند. برای استخراج این ارتباطات، از "تحلیل حساسیت" بهره گرفته شده است. در این تحلیل با افزایش یا کاهش هر پارامتر، تغییرات سایر پارامترها پایش شده و یک مدل کیفی (بدون ضرایب کمی) برای ارتباط دویه‌دوی پارامترها استخراج شده است. این مدل کیفی به وضوح نشان دهنده تضاد میان اهداف بهینه‌سازی مطالعه حاضر است.

لازم به ذکر است که این تضاد به معنای تضاد دویه‌دوی هر سه تابع هدف نیست، چرا که به عنوان مثال در فضای محدود شده توسط قیود مسئله، همبستگی مثبت میان دو تابع هدف زمان انتظار مسافران و هزینه شرکت بهره‌برداری مترو به وضوح قابل مشاهده است. اما به هیچ عنوان در فضای مدل مسئله (با در نظر گرفتن قیود مسئله)، هر سه تابع هدف به صورت همزمان دارای همبستگی مثبت نبوده‌اند که بتوان کیفیت هر سه آنها را همزمان افزایش داد. بنابراین چنین مسئله‌ای ماهیت چندمعیاره^۱ دارد و

در مطالعه‌ای دیگر، یانگ و همکارانش در سال ۲۰۱۳ مدل زمان‌بندی همکارمیناً^۶ برای بهینه‌سازی جدول زمان‌بندی سیستم‌های مترو ارائه کرده‌اند [Yang et al. 2013]. هدف این تحقیق بهینه‌سازی جدول زمان‌بندی به نحوی است که انرژی تولید شده توسط قطارهایی که ترمز می‌کنند، به صورت مستقیم در قطارهای در حال شتاب‌گیری استفاده شود. در صورتی که دو قطار در یک ایستگاه با یکدیگر ترمز کنند، برای ذخیره‌سازی انرژی تولید شده توسط آنها، ولتاژ خط از حد مجازی بالاتر رفته و این ذخیره‌سازی را غیرممکن می‌کند. بنابراین تنها همزمانی ترمز گرفتن قطارها با شتاب‌گیری قطارهای دیگر مفید خواهد بود. با استفاده از روش پیشنهاد شده در این مقاله، همزمانی ترمز گرفتن و شتاب‌گیری در ساعات اوج و غیر اوج سفر به ترتیب ۲۲ و ۱۵ درصد افزایش داشته است.

نصری و همکارانش نیز در مطالعه‌ای مشابه در سال ۲۰۱۰، بهینه‌سازی جدول زمان‌بندی در خطوط متروی تهران را برای استفاده حداکثر از انرژی الکتریکی تولید شده از ترمز قطارها انجام داده‌اند [Nasri, Moghadam and Mokhtari, 2010]. بهینه‌سازی جدول زمان‌بندی برای استفاده حداکثر از انرژی، با استفاده از شبیه‌سازی سیستم مترو و با استفاده از الگوریتم ژنتیک به عنوان روش بهینه‌سازی صورت گرفته است. در این مطالعه، تاثیر تغییر دو پارامتر فاصله زمانی بین ورود دو قطار متوالی به ایستگاه و مدت زمانی که یک قطار مجاز به تأخیر برای ترک ایستگاه است (زمان ذخیره شده)، بر میزان مصرف انرژی و با استفاده از شبیه‌سازی مطالعه شده است. در مرحله بعدی با استفاده از الگوریتم ژنتیک، تنها پارامتر دوم بهینه‌سازی می‌شود؛ چرا که برای فاصله زمانی بین دو قطار، معمولاً یک مقدار حداکثر (برای تضمین کیفیت سرویس) و یک مقدار حداقل (به دلایل اقتصادی) وجود دارد و خیلی در روند تصمیم‌گیری انعطاف‌پذیر نیست، اما زمان ذخیره شده انعطاف زیادی دارد و خیلی محدود نیست؛ بنابراین بهینه کردن آن تاثیر بسزایی در مصرف انرژی دارد.

در مطالعه‌ای دیگر و در سال ۲۰۰۵، چن و همکارانش بهینه‌سازی زمان‌بندی قطارهای MRT^۷ را با هدف کاهش حداکثر توان کشندگی^۸ و با استفاده از الگوریتم ژنتیک انجام داده‌اند [Chen, Lin and Liu, 2005]. اگر همه قطارها همزمان در حال

مورد مطالعه تحقیق حاضر، معیارهای طراحی در رضایت مسافران، هزینه‌های شرکت بهره‌برداری مترو و میزان مصرف انرژی خلاصه می‌شوند. در روند بهینه‌سازی متغیرهای اندازه شتاب قطارها در شروع حرکت بین دو ایستگاه، مدت زمان شتاب‌گیری، اندازه شتاب آنها در هنگام ترمز، مدت زمان ترمز گرفتن و مدت زمان توقف قطارها در ایستگاه‌ها بهینه می‌شوند.

۲. پیشینه تحقیق

در سال‌های اخیر مطالعات بسیاری در حوزه زمان‌بندی سیستم‌های حمل‌ونقل عمومی انجام گرفته است. در این زمینه، زمان‌بندی خطوط راه‌آهن شهری و بین‌شهری بخشی از این مطالعات را شامل می‌شود. تعداد بسیار زیاد این مطالعات به علت پیچیدگی بیش از حد مسئله است. همان‌طور که یانگ و همکارانش تاکید کرده‌اند، به علت پیچیده بودن ماهیت فیزیکی سیستم‌های مترو، مسئله زمان‌بندی آن، یکی از سخت‌ترین و چالش‌برانگیزترین مشکلات در برنامه‌ریزی مترو است که توجه محققان را برای دهه‌هایی به خود جلب کرده است [Yang et al. 2014]. در این بخش برخی از این مطالعات را که مرتبط با موضوع تحقیق حاضر هستند، مرور می‌کنیم.

سو و همکارانش در سال ۲۰۱۳، یک روش بهینه‌سازی جدول زمان‌بندی حرکت قطارهای مترو با کارایی بالای انرژی و یکپارچگی جدول زمانی خروجی را معرفی کرده‌اند [Su et al. 2013]. در این تحقیق استخراج شیوه‌های عملکرد مناسب مترو برای کارایی بالای انرژی در دو مرحله صورت می‌گیرد. مرحله بهینه‌سازی جدول زمان‌بندی که شامل زمان‌های ترک ایستگاه‌ها توسط قطارها، رسیدن آنها به ایستگاه‌ها و زمان توقف آنها در ایستگاه‌هاست؛ و مرحله تهیه مقطع سرعت قطارها بر حسب زمان در بین ایستگاه‌های متوالی بر اساس زمان‌های استخراج شده از مرحله قبل. در بخشی از این مطالعه، الگوریتمی برای توزیع زمان سفر کل قطار، در بین قطعه‌های مختلف خط، طراحی شده است. ایده بکار گرفته شده در این مرحله این است که زمان کل سفر باید به صورت نسبی بین قطعه‌ها تقسیم شود، به طوری که قطعه‌ای که نسبت انرژی به کمترین زمان سفر ممکن در آن (با توجه به حداکثر سرعت مجاز قطارها و فاصله بین ایستگاه‌ها) بزرگ‌تر است، بیشتر از آن سهم ببرد.

این واقعیت است که چنین مدل‌سازی ریاضی در تولید یک زمان‌بندی پایدار در برابر تأخیرات به وجود آمده دشوارترین بخش کار است؛ چرا که نیاز به داده‌های آماری تأخیر قطارها داشته و به اندازه‌گیری‌های دقیق نیاز دارد. در واقع مطالعاتی که دارای تابع هدف نیستند، میزان تأخیر قطار در یک ایستگاه و تعداد مسافران نشسته در قطار، در حال ورود به قطار یا ترک آن را در نظر نمی‌گیرند و بنابراین تصمیم‌گیری راجع به افزایش یا کاهش زمان سفر تمام مسافران غیر ممکن می‌شود. نویسندگان این مقاله، کل زمان سفر مسافران را به عنوان مهم‌ترین معیار قضاوت برای کیفیت زمان‌بندی قطار مسافری می‌شناسند. بنابراین چنین معیاری باید به عنوان هدف بهینه‌سازی، حداقل شود.

۳. بهینه‌سازی چندهدفه

در طراحی و تصمیم‌گیری‌های مهندسی عموماً با مسائل بهینه‌سازی مواجه هستیم [Rajabi, 2010]. بهینه‌سازی، یافتن مقادیر بحرانی یک یا چند تابع هدف با رعایت قیود مسئله است؛ به عبارتی مسئله بهینه‌سازی، پیدا کردن بردار متغیرهای تصمیم‌گیری^{۱۱} است، به طوری که قیود مسئله را برآورده کرده و مقادیر برداری که مولفه‌هایش توابع هدف^{۱۱} مسئله هستند را بهینه کند [Saadatesrsh, Mansourian and Talei, 2009]. توابع هدف در مسئله، متناظر با معیارهایی که در طراحی‌ها در نظر گرفته می‌شوند، تعریف می‌شوند که نقاط بحرانی توابع هدف می‌تواند بیانگر بهترین تصمیم‌گیری‌ها به عنوان راه‌حل مسئله باشند.

هنگامی که در طراحی، تنها یک معیار در نظر گرفته شود و مسئله بهینه‌سازی مرتبط با سیستم مدل‌سازی شده، تنها شامل یک تابع هدف باشد، مسئله موردنظر، بهینه‌سازی تک‌هدفه نامیده می‌شود. حل مسئله بهینه‌سازی تک‌هدفه، یافتن راه‌حلی است که به بهترین مقدار تنها تابع هدف منتهی شده و همزمان تمام قیود مسئله را برآورده می‌کند. الگوریتم‌ها و روش‌های گوناگونی برای جستجوی جواب بهینه در فضای جواب‌های ممکن در مسائل بهینه‌سازی تک‌هدفه وجود دارند. روش‌های جستجوی قطعی مانند الگوریتم‌های گرادیان‌مبنای^{۱۲} و یا روش‌های جستجوی تصادفی مانند تبرید شبیه‌سازی شده^{۱۳} از آن جمله هستند. همچنین می‌توان به

شتاب‌گیری باشند، توان کشندگی روی نقطه اوج خواهد بود که با یک زمان‌بندی دقیق، می‌توان از شتاب‌گیری همزمان تعداد زیادی از قطارها جلوگیری کرد. با توجه به تعداد حالت‌های زیاد قطارها و ایستگاه‌ها در بررسی میزان شدت ترمزگرفتن هر قطار در هر ایستگاه، از الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی این زمان‌بندی استفاده شده است. در این مقاله شبیه‌سازی و بهینه‌سازی به صورت همزمان انجام شده است. برای شبیه‌سازی از نرم افزار TOM^۹ استفاده شده است و الگوریتم ژنتیک در کنار آن توسعه داده شده است. هر نسل که تولید می‌شود در شبیه‌سازی کنترل می‌شود و مقدار توابع بهینگی به ازای جمعیت تولید شده، استخراج می‌شود.

نیو و ژو در سال ۲۰۱۳، بهینه‌سازی جدول زمان‌بندی خطوط راه‌آهن شهری را تحت شرایط اشباع ظرفیت سیستم در ساعات اوج سفر انجام داده‌اند [Niu and Zhou, 2013]. در ساعات اوج سفر، هنگامی که ظرفیت قطاری که در ایستگاه توقف کرده است، تکمیل شود، امکان دارد مسافران حاضر در ایستگاه به اجبار تا رسیدن قطارهای بعدی منتظر بمانند. در این مطالعه، مدلی برای بهینه‌سازی زمان ورود و خروج قطارها در ایستگاه‌ها در ساعات اوج سفر، برای کاهش مدت زمان تأخیر کل مسافران ارائه شده است.

هو و همکارانش در سال ۲۰۱۳، با استفاده از فازی‌سازی توابع هدف، بهینه‌سازی جدول زمانی حرکت قطارها در یک شبکه حمل‌ونقل ریلی را با هدف کاهش مصرف انرژی و آلاینده‌های خروجی و همچنین کاهش زمان سفر به طور همزمان، انجام داده‌اند [Hu et al., 2013]. همچنین در مطالعه‌ای دیگر در همین سال، چوری‌ر و همکارانش با استفاده از یک روش تکاملی دوهدفه، بهینه‌سازی همزمان میزان مصرف انرژی و زمان سفر قطارها در خطوط راه‌آهن را انجام داده‌اند که خروجی کار، تهیه مقطع سرعت حرکت قطار در هر نقطه از مسیر است [Chevrier, Pelleglini and Rodriguez, 2013].

اهمیت زمان سفر به عنوان یک تابع هدف برای بهینه‌سازی زمان‌بندی مترو در مطالعه سلز و همکارانش معرفی شده است [Sels et al. 2013]. از نظر نویسندگان این مطالعه، دلیل نپرداختن کافی مطالعات پیشین به استفاده از چنین توابع هدفی،

$\vec{F} =$ بردار S_D از فضای $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ به یک بردار $(F_1, F_2, \dots, F_m)^T$ از فضای S_O اشاره دارد.

راه‌حلی که در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه جستجو می‌شود، به جای یک متغیر نرده‌ای، برداری از مقادیر است. به ازای هر راه‌حل \vec{X} بردار توابع هدف \vec{F} را داریم که مولفه i -ام آن، مقدار i -امین تابع هدف به ازای بردار \vec{X} یا به عبارتی $F_i(\vec{X})$ را نشان می‌دهد. پس به ازای هر راه‌حل، برداری از توابع هدف داریم.

۳-۱ مفهوم غلبه پارتو

از میان تمام راه‌حل‌های ممکن، برخی راه‌حل‌ها هستند که بر راه‌حل‌های دیگر غلبه دارند؛ به این معنی که مقادیر تمام توابع هدف به ازای راه‌حل اول قابل‌قبول‌تر از راه‌حل دیگر است. اما در مقابل راه‌حل‌هایی هستند که در مقایسه با راه‌حل‌های دیگر، تنها برخی از مقادیر توابع هدف قابل‌قبول‌تر دارند و نمی‌توان مقادیری که سایر توابع هدف به خود اختصاص داده‌اند را نیز قابل‌قبول‌تر دانست. بنابراین می‌گوییم راه‌حل x بر راه‌حل y غلبه می‌کند ($x < y$)، اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

- راه‌حل x در هیچ تابع هدفی بدتر از راه‌حل y نباشد.
- راه‌حل x در حداقل یک تابع هدف از راه‌حل y برتر باشد.

بنابراین اگر فرض را بر این بگیریم که هدفمان حداقل کردن تمام توابع هدف است، مفهوم غلبه پارتو را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$x < y \Leftrightarrow f_m(x) \leq f_m(y) \quad \forall m = 1, 2, \dots, M \wedge \exists i: f_i(x) < f_i(y) \quad (2)$$

راه‌حل x را راه‌حل بهینه پارتو می‌گوییم اگر و تنها اگر هیچ راه‌حل x' وجود نداشته باشد که بر x غلبه کند، یعنی:

$$x \text{ is Pareto Optimal} \Leftrightarrow \nexists x': x' < x \quad (3)$$

روش‌های جمعیت‌منا مانند الگوریتم ژنتیک و الگوریتم‌های هوش جمعی اشاره کرد [Khoshamooz, 2011]. با این حال، در مسائل دنیای واقعی به ندرت با شرایطی روبه‌رو می‌شویم که تنها یک هدف برای بهینه‌سازی داشته باشیم. مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، مسائلی با دو تابع هدف یا بیش از دو تابع هدف هستند که عموماً در تضاد با یکدیگر بوده و بهبود یکی از آنها با بدتر شدن یک یا چند تابع هدف دیگر همراه است. تفاوت اصلی مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با مسائل بهینه‌سازی تک‌هدفه در این است که این مسائل دارای یک جواب بهینه واحد نیستند و در عوض مجموعه‌ای از راه‌حل‌های بهینه داریم که یک بده بستان^{۱۴} میان اهداف را ارائه می‌دهند. بنابراین نمی‌توان صراحتاً راه‌حلی را بر دیگری ترجیح داد. در این مرحله لازم است که کارشناس یا مدیر تصمیم‌گیرنده، بسته به نوع مسئله و اولویت‌ها و شرایطی که در تصمیم‌گیری دخالت دارند، یکی از راه‌حل‌های این مجموعه جواب‌ها را به عنوان راه‌حل ترجیح داده شده برگزیند. یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه را می‌توان به صورت ریاضی به شکل زیر معرفی کرد:

$$\text{Finding } \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix} \quad \text{Which minimizes / maximizes } F_m(\vec{X}) \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

$$\text{Subject to } g_j(\vec{X}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J$$

$$h_k(\vec{X}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 1, 2, \dots, I$$

که در آن راه‌حل \vec{X} ، بردار متغیرهای تصمیم‌گیری و g_j و h_k ‌ها قیود مسئله هستند. هر کدام از متغیرهای تصمیم‌گیری x_i محدود به کران پایین x_i^L و کران بالای x_i^U مربوط به خود هستند. در واقع این قیود، فضای n بعدی تصمیم‌گیری D را به $S_D \subset D$ محدود می‌کنند. همچنین نگاشت این قیود، فضای n بعدی هدف O را نیز به $S_O \subset O$ محدود می‌کنند. M نیز تعداد توابع هدف مسئله است. این M تابع هدف، نگاشتی از فضای تصمیم‌گیری S_D به فضای هدف S_O را ایجاد می‌کنند. این نگاشت از فضای n بعدی تصمیم‌گیری به فضای m بعدی هدف صورت می‌پذیرد؛ بنابراین همان طور که در شکل (۱) ملاحظه می‌شود، هر بردار

۲-۳ راه‌حل‌های حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفه

در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه به دنبال یافتن راه‌حلی هستیم که ضمن برآورده ساختن قیود مسئله، اهداف مسئله را بهینه کند. برای این کار، روش‌های مختلفی وجود دارد که در ادامه این بخش به آنها اشاره شده است.

الف) روش تابع ترکیب شده^{۱۵}

در این روش به جای این که توابع هدف مسئله را به صورت جداگانه در نظر بگیریم و به دنبال راه‌حلی باشیم که به طور همزمان تمام آنها را بهینه کند، آنها را در یک تابع هدف ترکیب می‌کنیم و سعی در بهینه‌سازی آن داریم. با توجه به اهمیت و اولویت اهداف، می‌توان برای هر کدام وزنی (w_m) در نظر گرفت و آنها را به صورت وزن‌دار با یکدیگر جمع کرد:

$$F = \sum_{m=1}^M w_m F_m(\vec{X}) \quad (۶)$$

$$\sum_{m=1}^M w_m = 1$$

ب) روش تابع محدود شده^{۱۶}

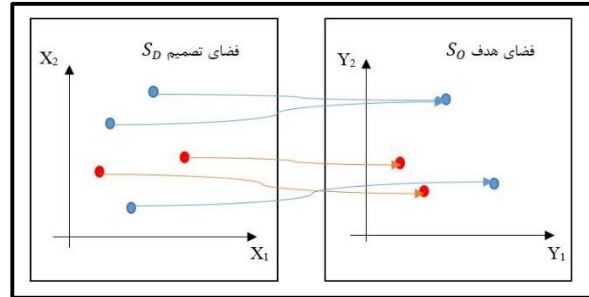
در این روش سعی داریم تا راه‌حل بهینه را در یک فضای راه‌حل‌های ممکن محدود شده به دام بیاندازیم. برای محدود کردن فضای راه‌حل‌های ممکن، یکی از توابع هدف را به عنوان تابع هدف اصلی بهینه‌سازی در نظر می‌گیریم و سایر توابع هدف را به قیودی تبدیل می‌کنیم تا اشتراک قیود جدید با قیود پیشین مسئله، فضای راه‌حل‌های ممکن را باز هم محدودتر کرده و در فضای جدید به جستجوی راه‌حل بهینه برای بهینه کردن تابع هدف اصلی می‌پردازیم. بنابراین مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$\text{Finding } \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_I \end{bmatrix} \quad (۷)$$

Which Maximizes $F_1(\vec{X})$

Subject to $F_t(\vec{X}) \geq e_t \quad T$
 $= 2, 3, \dots, M$

توضیح آنکه این تعریف به هیچ وجه به این معنا نخواهد بود که باید تنها یک راه‌حل بهینه پارتو داشته باشیم.



شکل ۱. نگاشت از فضای تصمیم‌گیری به فضای هدف [Justesen, 2009]

با توجه به مفهوم غلبه پارتو می‌توان یک رتبه‌بندی میان مجموعه راه‌حل‌های ممکن انجام داد. در واقع این رتبه‌بندی به نوعی مجموعه راه‌حل‌های ممکن را به زیرمجموعه‌هایی افزایش می‌دهد. در هر زیرمجموعه، با راه‌حلی‌هایی روبه‌رو هستیم که بر سایر راه‌حل‌های زیرمجموعه‌های با رتبه پایین‌تر غلبه دارند و توسط راه‌حل‌های زیرمجموعه‌های با رتبه بالاتر مغلوب هستند. اما هیچ کدام از راه‌حل‌های داخل یک زیرمجموعه بر دیگری غلبه نمی‌کند و توسط راه‌حلی دیگر از آن زیرمجموعه مغلوب نمی‌گردد. زیرمجموعه با برترین رتبه، مجموعه راه‌حل‌های بهینه پارتو هستند (P^*) که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P^* := \{ \vec{X} \in S_D \mid \nexists \vec{X}' \in S_D : \vec{X}' < \vec{X} \} \quad (۴)$$

هدف اصلی در بهینه‌سازی این است تا به تقریب خوبی از اعضای این مجموعه دست پیدا کنیم و همان‌طور که پیشتر بیان شد، لازم است تا کارشناس یا مدیر، بسته به شرایط مسئله، راه‌حل ترجیح داده شده را از این مجموعه راه‌حل‌ها انتخاب کند.

در فضای هدف که هر نقطه از آن بیانگر $\vec{F}(\vec{X})$ به ازای راه‌حل \vec{X} است، تصویر مجموعه بهینه پارتو، سطح پارتو (F^*) نامیده می‌شود:

$$F^* := \{ \vec{F}(\vec{X}) \mid \vec{X} \in P^* \} \quad (۵)$$

این سطح مجموعه راه‌حل‌های غیرمغلوب مسئله را نشان می‌دهد و هیچ یک از نقاط این سطح بر دیگری غلبه نمی‌کند. با حرکت بر روی این سطح، مقادیر برخی از اهداف بهتر شده و در مقابل برخی دیگر تضعیف می‌شوند.

رقابت می‌کنند. از آنجایی که مناسب‌ترین‌ها و سازگارترین‌ها می‌توانند در این رقابت ماندگار شوند، جمعیت به صورت تکراری و نسل به نسل پیشرفت می‌کند و افراد آن به سمت پاسخ‌های بهینه‌تر میل می‌کنند.

از جمله این الگوریتم‌ها، NSGA-II است که توسط دب و همکاران در سال ۲۰۰۲ توسعه داده شده است [Deb et al. 2002]. روند کلی این الگوریتم را می‌توان به صورت شکل (۲) خلاصه کرد. پس از تولید جمعیت اولیه، به هر فرد جمعیت بر اساس تعداد افرادی که بر آن فرد غلبه می‌کنند، رتبه‌ای اختصاص داده می‌شود که بر اساس این رتبه، کل جمعیت رتبه‌بندی می‌شود. سپس بر اساس رابطه (۸)، فاصله ازدحامی^{۲۵} افراد واقع در یک رتبه، محاسبه می‌شود که در این رابطه، $F[i].m$ مقدار تابع هدف m -ام به ازای فرد i -ام و f_m^{max} و f_m^{min} بیشترین و کمترین مقدار تابع هدف m -ام است. در مرحله بعد، انتخاب افراد به عنوان والدین بر اساس رقابت دودویی^{۲۶} صورت می‌گیرد. در این رقابت، افراد با رتبه برتر اولویت دارند و در صورتی که رقابت میان دو فرد با رتبه یکسان باشد، فرد با فاصله ازدحامی بیشتر در اولویت خواهد بود. پس از آن، عملگرهای تقاطع و جهش الگوریتم ژنتیک برای تولید فرزندان انجام می‌گیرد و جمعیت فرزندان ایجاد شده به جمعیت اصلی اضافه می‌شوند. سپس از این جمعیت جدید، به تعداد اندازه جمعیت الگوریتم، افرادی بر اساس رقابت دودویی انتخاب می‌شوند و نسل جدید شکل می‌گیرد. این چرخه تا زمان برقرار شدن شرایط توقف ادامه پیدا می‌کند.

$$F = \{individual \mid rank(individual) = i\}$$

$$l = |F|$$

$$\forall i: F[i]_{distance} = 0$$

$$\forall m: \{$$

$$sort(F, m)$$

$$F[1]_{distance} = F[l]_{distance} = \infty$$

$$\forall i = 2 \text{ to } l - 1:$$

$$= F[i]_{distance} + \frac{F[i]_{distance} - F[i-1]_{distance}}{f_m^{max} - f_m^{min}}$$

}

$$g_j(\vec{X}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J$$

$$h_k(\vec{X}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad i = 1, 2, \dots, I$$

که در آن e_t نمایانگر کران پایین t -امین تابع هدف است.

پ) روش‌های برمبنای جمعیت^{۱۷}

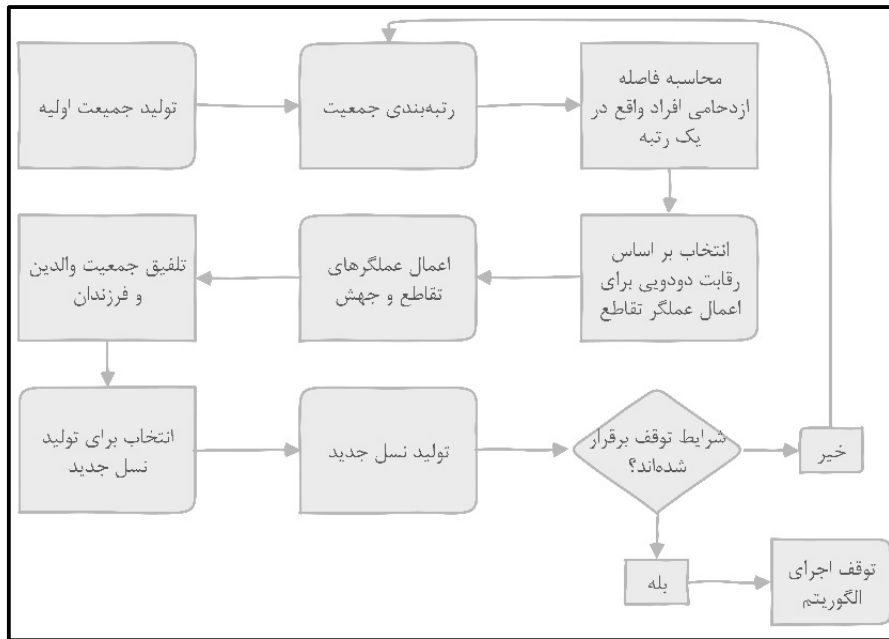
در این روش‌ها، از جمعیت الگوریتم‌های تکاملی برای تنوع‌بخشی به فضای جستجو استفاده می‌شود، ولی مفهوم غلبه پارتو به صورت مستقیم در الگوریتم و در فرآیند انتخاب برای نسل آینده استفاده نمی‌شود [Coello and Lamont, 2004]. از جمله این روش‌ها VEGA^{۱۸} است. در این روش، جمعیت راه‌حل‌ها، به زیرمجموعه‌هایی به تعداد توابع هدف تقسیم می‌شود و هر تابع هدف در زیرمجموعه مربوط به خودش به جستجوی مقدار بهینه خود می‌پردازد و سپس همه مقادیر بهینه در یک جمعیت ترکیب می‌شوند و در نهایت عملگرهای ادغام و جهش الگوریتم ژنتیک بر روی آنها اعمال می‌شوند.

ت) روش‌های برمبنای مفاهیم پارتو^{۱۹}

این روش‌ها ضمن استفاده از جمعیت الگوریتم‌های تکاملی برای برآورد راه‌حل‌های بهینه، از مفهوم غلبه پارتو نیز به صورت مستقیم در فرآیند انتخاب برای نسل بعد استفاده می‌کنند. این روش‌ها به الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه موسوم هستند که در سال‌های اخیر طیف متنوعی از آنها مانند MOGA^{۲۰}، NSGA^{۲۱} و NSGA-II^{۲۲}، SPEA^{۲۳}، SPEA2^{۲۴}، NPGA^{۲۵} و MOPSO^{۲۶} پیشنهاد شده‌اند.

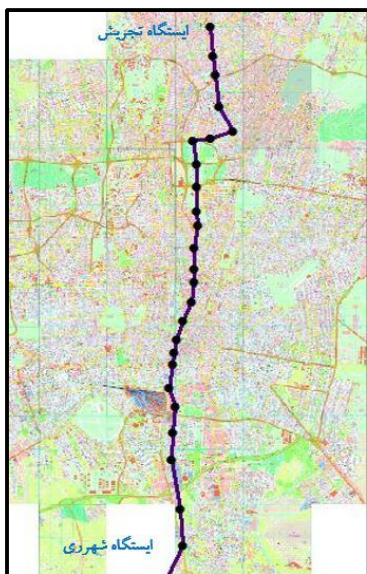
۴. الگوریتم NSGA-II

یکی از راه‌های حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، استفاده از الگوریتم‌های تکاملی است. الگوریتم‌های تکاملی با الهام از نظریه تکامل داروین، سعی در حفظ مناسب‌ترین پاسخ‌ها دارند. در یک الگوریتم تکاملی، راه‌حل‌ها به عنوان افراد یک جمعیت در نظر گرفته می‌شوند و میزان بهینگی افراد، با توجه به این که تا چه حد مسئله را بهتر می‌توانند حل کنند، تعیین می‌شود. افراد جمعیت می‌توانند با یکدیگر ترکیب شوند و فرزندان را ایجاد کنند و سپس والدین و فرزندان برای ماندگاری در نسل بعدی



شکل ۲. مراحل اجرای الگوریتم NSGA-II

(۳) نمایی از منطقه مورد مطالعه را نشان می‌دهد. طی برداشت‌های میدانی، داده‌های مربوط به ساعات اوج سفر و تراکم جمعیت ورودی و خروجی ایستگاه‌ها جمع‌آوری شد. در بررسی‌های میدانی زمان‌های شروع و پایان اوج سفر و غیراوج سفر اندازه‌گیری شد و ساعات روز به سه دسته با تراکم کم، متوسط و زیاد سفر تقسیم‌بندی شد که در این مطالعه بر روی بازه زمانی ۶:۰۰ تا ۹:۰۰ صبح با تراکم بالای سفر تمرکز شده است.



شکل ۳. منطقه مورد مطالعه

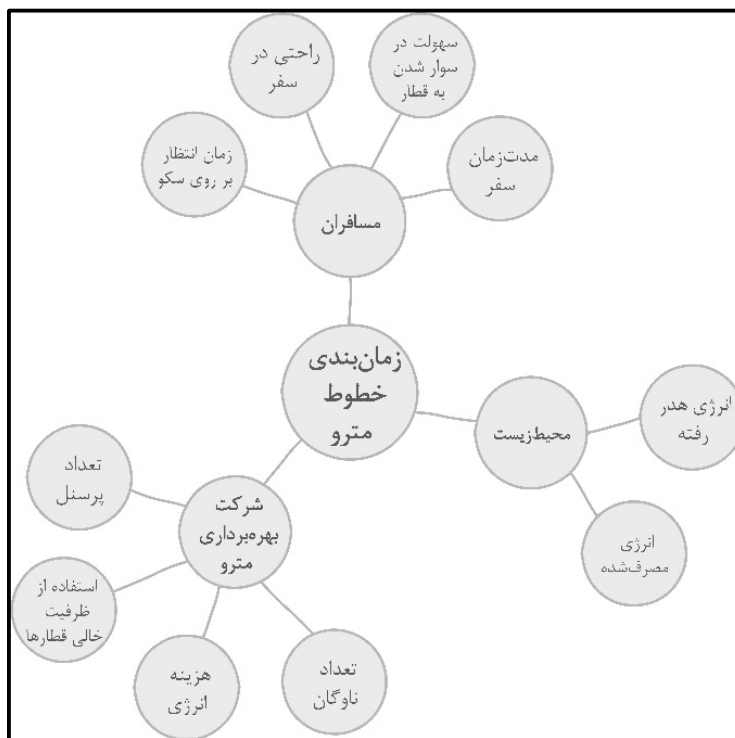
۵. مدل‌سازی مسئله زمان‌بندی حرکت

قطارهای خط ۱ متروی تهران

برای بهینه‌سازی زمان‌بندی با استفاده از الگوریتم NSGA-II لازم است تا مسئله به صورت پارامتریک مدل‌سازی شود تا بتوان روند بهینه‌سازی را پیاده کرد. در این بخش پس از معرفی منطقه مورد مطالعه، روند این مدل‌سازی شرح داده شده است.

۵-۱ منطقه مورد مطالعه و داده‌های مورد نیاز

محدوده مورد مطالعه این تحقیق، خط ۱ متروی تهران در نظر گرفته شده است. برای جلوگیری از پیچیدگی‌های مربوط به تعیین جهت سفر مسافرانی که وارد ایستگاه می‌شوند، و همچنین پیچیدگی‌های ناشی از تغییر خط قطارها در ایستگاه‌های پایانی، در روند بهینه‌سازی، تنها زمان‌بندی حرکت قطارها از سمت جنوب به شمال و در فاصله ایستگاه‌های شهرری تا تجریش انجام شده است. بنابراین در این مطالعه، منظور از ایستگاه‌های ۱ و ۲ و ... تا n سکوها شرقی (مربوط به حرکت از جهت جنوب به شمال) ایستگاه‌های خط ۱ متروی تهران است. شکل



شکل ۴. چارچوب مفهومی پیشنهاد شده برای ارائه پارامترهای زمان‌بندی خطوط مترو با در نظر گرفتن مولفه‌های حمل و نقل پایدار

شده است. علاوه بر این ارتباط تأثیرگذاری و تأثیرپذیری، ارتباطاتی بین هر کدام از این اجزا نیز وجود دارد که ماهیت

مسئله زمان‌بندی را یک ماهیت چندمعیاره می‌کند. از آنجایی که به طور معمول بهبود کیفیت یکی از معیارها منجر به از دست رفتن کیفیت سایر معیارها می‌شود، بنابراین میان این معیارها تضاد وجود دارد. ارتباط دویه‌دوی این پارامترها با استفاده از تحلیل حساسیت به دست آمده است. به عبارت دیگر به مدل کیفی (بدون ضرایب کمی) برای ارتباط هر دو پارامتر با یکدیگر استخراج شده است. هدف از توسعه چنین چارچوبی، تسهیل روند مدل‌سازی و انتخاب معیارهای زمان‌بندی بوده است. جدول (۱)، همبستگی میان اجزای شکل (۴) را نشان می‌دهد. در این جدول کلمه «مثبت» به معنای وجود همبستگی مثبت میان دو جزء است؛ به این معنی که افزایش میزان یا مقدار هر کدام از آن دو باعث افزایش میزان یا مقدار دیگری می‌شود. به همین ترتیب کلمه «منفی» در این جدول، بیانگر وجود همبستگی منفی است

۲-۵ معیارهای طراحی زمان‌بندی

برای طراحی یک زمان‌بندی مناسب برای سیستم مترو، لازم است ابتدا افراد و پدیده‌هایی که به نوعی با زمان‌بندی مترو در ارتباط بوده و بر روی آن تأثیر می‌گذارند یا از آن تأثیر می‌گیرند، مشخص شوند. در این مطالعه، با توجه به اینکه بر سه مولفه اجتماعی، اقتصادی و زیست‌محیطی حمل و نقل پایدار در طراحی زمان‌بندی تمرکز شده است، تا حد امکان سعی شده است تا یک چارچوب جامع از پدیده‌های مرتبط با این سه مولفه در زمان‌بندی ارائه شود. شکل (۴) این پدیده‌ها و اجزای آنها را به تفصیل نمایش می‌دهد.

تمامی ده جزء مشخص شده در شکل (۴) با جدول زمان‌بندی در ارتباط دو طرفه هستند، به این معنی که طراحی زمان‌بندی باید بر اساس آنها صورت پذیرد و هر کدام به عنوان قیدی در جدول زمان‌بندی قطارها تأثیرگذار هستند؛ از طرفی میزان کیفیت و رضایت هر کدام از این اجزا تابعی از جدول زمان‌بندی ارائه

جدول ۱. نوع همبستگی میان اجزای چارچوب ارائه شده در مسئله زمان‌بندی مترو

محیط‌زیست		شرکت بهره‌برداری مترو				مسافران				انتظار روی سکو	
						انتظار روی سکو	راحتی	سهولت در سوار شدن	زمان سفر		
منفی	منفی	منفی	مثبت	منفی	منفی	مثبت	-	-	-	انتظار روی سکو	مسافران
مثبت	مثبت	مثبت	منفی	مثبت	مثبت	منفی	مثبت	-	-	راحتی	
مثبت	مثبت	مثبت	منفی	مثبت	مثبت	-	-	مثبت	-	سهولت در سوار شدن	
منفی	منفی	منفی	مثبت	منفی	منفی	-	-	منفی	مثبت	زمان سفر	
مثبت	مثبت	مثبت	-	مثبت	-	منفی	مثبت	مثبت	منفی	تعداد ناوگان	شرکت بهره‌برداری مترو
-	-	-	-	-	مثبت	منفی	مثبت	مثبت	منفی	تعداد پرسنل	
-	-	-	-	-	مثبت	مثبت	منفی	منفی	مثبت	استفاده از ظرفیت	
مثبت	مثبت	-	-	-	مثبت	منفی	مثبت	مثبت	منفی	هزینه انرژی	
مثبت	-	مثبت	-	-	مثبت	منفی	مثبت	مثبت	منفی	انرژی مصرف شده	محیط‌زیست
-	مثبت	مثبت	-	-	مثبت	منفی	مثبت	مثبت	منفی	انرژی هدر رفته	

انتخاب شده برای هر کدام در جدول (۲) خلاصه شده‌اند.

۴-۵ متغیرهای تصمیم‌گیری

با توجه به معیارهای زمان‌بندی، از میان پارامترهای جدول (۲)، مواردی را به عنوان متغیر تصمیم‌گیری در نظر می‌گیریم که باید در روند بهینه‌سازی، به دنبال مقادیر بهینه آنها باشیم. با استفاده از تحلیل حساسیت پارامترهایی که تغییرات آنها حساسیت موثرتری بر روی زمان‌بندی و شاخص‌های ارزیابی کیفیت سرویس‌دهی نشان داده‌اند را به عنوان متغیرهای تصمیم‌گیری در روند بهینه‌سازی انتخاب می‌کنیم. متغیرهای تصمیم‌گیری انتخاب‌شده عبارتند از:

با توجه به آنچه که در مقدمه در رابطه با معیارهای طراحی بیان شد، برای زمان‌بندی خطوط مترو، معیارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

- معیار رضایت مسافران: کمترین مدت‌زمان سفر
- معیار رضایت شرکت بهره‌برداری مترو: بیشترین استفاده از ظرفیت خالی قطارها
- معیار سلامت محیط‌زیست: کمترین انرژی مصرف شده

۳-۵ پارامترهای مسئله

پارامترهای مدل ارائه شده از مسئله زمان‌بندی مترو و نمادهای

محمدرضا ساحل‌گزین، عباس علیمحمدی
جدول ۲. پارامترهای مدل‌سازی مسئله زمان‌بندی مترو

نماد	شرح پارامترهای مسئله
N	تعداد ایستگاه‌های خط
$n=1,2,\dots,N$	شماره ایستگاه‌ها
$d_{n,n+1}$	فاصله بین ایستگاه n ام و $n+1$ ام
I	تعداد قطارهای فعال در خط
$i=1,2,\dots,I$	شماره قطار
M	وزن هر قطار بدون مسافر
m	وزن هر مسافر
$a_i^{n,n+1}$	شتاب قطار i -ام در هنگام شروع حرکت در فاصله ایستگاه n و $n+1$
$b_i^{n,n+1}$	شتاب قطار i -ام در هنگام ترمز در فاصله ایستگاه n و $n+1$
$ToA_i^{n,n+1}$	مدت زمانی که قطار i -ام در فاصله ایستگاه n و $n+1$ شتاب می‌گیرد
$ToC_i^{n,n+1}$	مدت زمانی که قطار i -ام در فاصله ایستگاه n و $n+1$ با سرعت ثابت حرکت می‌کند
$ToB_i^{n,n+1}$	مدت زمانی که قطار i -ام در فاصله ایستگاه n و $n+1$ ترمز می‌گیرد.
$ToT_i^{n,n+1}$	مدت زمان سفر قطار i -ام در فاصله ایستگاه n و $n+1$
ToD_i^n	مدت زمان توقف قطار i -ام در ایستگاه n -ام
$ToH_{i,i+1}^n$	فاصله زمانی بین قطار i و $i+1$ در ایستگاه n -ام
Or^n	نرخ جمعیت ورودی ایستگاه n -ام در واحد زمان
De^n	نرخ جمعیت خروجی ایستگاه n -ام در واحد زمان
B_i^n	تعداد مسافر در حال انتظار در سکوی n -ام برای سوار شدن در قطار i -ام
L_i^n	تعداد مسافر پیاده شده در ایستگاه n -ام از قطار i -ام
C_T	ظرفیت هر قطار
f_k	ضریب اصطکاک لغزشی (جنشی) چرخهای قطار با ریل
g	شتاب گرانش

جدول ۳. متغیرهای تصمیم‌گیری در بهینه‌سازی جدول زمان‌بندی

مترو

نماد	متغیر تصمیم‌گیری
$ToA_i^{n,n+1}$	مدت زمانی که قطار i -ام در فاصله ایستگاه n و $n+1$ شتاب می‌گیرد
$ToB_i^{n,n+1}$	مدت زمانی که قطار i -ام در فاصله ایستگاه n و $n+1$ ترمز می‌گیرد
ToD_i^n	مدت زمان توقف قطار i -ام در ایستگاه n -ام
$a_i^{n,n+1}$	شتاب قطار i -ام در هنگام شروع حرکت در فاصله ایستگاه n و $n+1$
$b_i^{n,n+1}$	شتاب قطار i -ام در هنگام ترمز گرفتن در فاصله ایستگاه n و $n+1$

لازم به توضیح است که $ToC_i^{n,n+1}$ به علت این که وابسته به متغیرهای فوق است و با توجه به فاصله بین ایستگاه‌ها طبق رابطه (۹) به دست می‌آید، به عنوان متغیر تصمیم‌گیری مستقل در نظر گرفته نشده است. همچنین تصمیم‌گیری در رابطه با فاصله زمانی بین ورود دو قطار متوالی به ایستگاه ($ToH_{i,i+1}^n$) وابسته به تعداد قطارهای فعال در خط بوده و از انعطاف کافی در تصمیم‌گیری برای زمان‌بندی برخوردار نیست. بنابراین در این مطالعه، به عنوان متغیر تصمیم‌گیری در نظر گرفته نشده و به عنوان قیدی (قید ب در بخش ۵-۵) برای متغیرهای تصمیم‌گیری معرفی شده است. در تعریف این قید، به جای در نظر گرفتن مقدار ثابت برای $ToH_{i,i+1}^n$ ، با معرفی کران بالا و پایین برای این

ایستگاه بعدی، اندکی بیشتر در ایستگاه توقف کند. اما به هر صورت با توجه به رضایت و راحتی مسافران، لازم است این مقدار از حدی بیشتر نشود. بنابراین داریم:

$$ToD_{min}^n = a * \left(\frac{Or^n + De^n}{2} \right) - b \quad (11)$$

$$ToD_{max}^n = a' * ToD_{min}^n$$

ب) کران بالا و پایین فاصله زمانی بین ورود دو قطار متوالی به ایستگاه

$$ToH_{min} \leq ToH_{i,i+1}^n \leq ToH_{max} \quad (12)$$

به طور کلی فاصله زمانی بین ورود دو قطار، نه باید خیلی کم باشد تا برای شرکت بهره برداری مترو بیش از حد هزینه بردار باشد، و نه باید خیلی زیاد باشد تا رضایت و راحتی مسافران زیر سؤال رود. لازم به ذکر است که این متغیر با متغیرهای تصمیم گیری مرتبط بوده و طبق رابطه (۱۳) از $ToT_i^{n,n+1}$ و ToD_i^n به دست می آید:

$$ToH_{i,i+1}^n = \overline{ToH} + \sum_{k=1}^n (ToT_{i+1}^{k,k+1} + ToD_{i+1}^k) - \sum_{k=1}^n (ToT_i^{k,k+1} + ToD_i^k) \quad (13)$$

که در آن \overline{ToH} میانگین فاصله زمانی ورود قطارهای متوالی به ایستگاه هاست که از جدول زمان بندی کنونی به دست می آید.

پ) حداکثر اندازه شتاب و سرعت قطارها

$$a_i^{n,n+1} \leq a_{max} \quad (14)$$

$$b_i^{n,n+1} \leq b_{max}$$

$$a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1} \leq V_{max}$$

با توجه به نوع و مشخصات فنی قطارها، مقدار حداکثر شتابی که قادر هستند در شروع حرکت یا در هنگام ترمز گرفتن داشته باشند، و همچنین سرعت بیشینه قطارها محدود است.

ت) رابطه بین مدت زمان شتاب گیری و ترمز با اندازه شتاب قطارها

$$a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1} = -b_i^{n,n+1} * ToB_i^{n,n+1} \quad (15)$$

متغیر، انعطاف در تصمیم گیری متغیرهای جدول (۳) افزایش می یابد تا فضای راه حل های ممکن افزایش پیدا کند.

$$ToC_i^{n,n+1} = \frac{d_{n,n+1}}{a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1}} - \frac{1}{2} * (ToA_i^{n,n+1} + ToB_i^{n,n+1}) \quad (9)$$

ضمناً برای ساده سازی فرض شده است که کنترل حرکت همه قطارها در ایستگاه های یکسان، مشابه یکدیگر است. به عنوان مثال زمان توقف در یک ایستگاه مشخص و یا مدت زمان شتاب گیری و اندازه شتاب حرکت در بین دو ایستگاه مشخص، برای همه قطارها یکسان هستند.

۵-۵ قیود مسئله

هر کدام از متغیرهای تصمیم گیری ذکر شده در جدول (۳)، باید به کران های بالا و پایین و یا روابطی مقید باشند تا در بهینه سازی مقدار آنها از حدود معینی کمتر یا بیشتر نشود تا محدودیت های هندسی، هزینه ای و انسانی برآورده شود و مقادیری که در بهینه سازی برای آنها به دست می آید، در دنیای واقعی قابل پیاده سازی باشد. قیودی که در ادامه معرفی می شوند را در نظر گرفته می گیریم تا راه حل ها در بازه ای منطقی محدود شوند.

الف) کران بالا و پایین مدت زمان توقف قطارها در ایستگاه ها

$$ToD_{min}^n \leq ToD_{i,i+1}^n \leq ToD_{max}^n \quad (10)$$

بسته به جمعیتی که می خواهند در یک ایستگاه از قطار پیاده شوند و جمعیت منتظر بر روی سکو برای سوار شدن به قطار، یک مقدار حداقل برای توقف قطار در آن ایستگاه تعریف می شود تا همه جمعیت فرصت پیاده و سوار شدن به قطار را داشته باشند. از طرفی اگر یک ایستگاه جمعیت زیادی نداشته باشد، نیازی به توقف طولانی نیست و این کران پایین مقدار کمتری به خود می گیرد. بنابراین بهتر است این مقدار برای هر ایستگاه متفاوت باشد. اما کران بالا ارتباطی به جمعیت ندارد. گاهی لازم است حتی اگر تمام مسافرانی که قصد پیاده یا سوار شدن داشتند، جابه جا شدند، قطار برای بهبود عملکرد کل سیستم با هدف کاهش مصرف انرژی و هزینه، در فاصله رسیدن به ایستگاه بعدی و حفظ فاصله زمانی مناسب برای رسیدن به

$$ToA_1^{n,n+1} = ToA_2^{n,n+1} = \dots = ToA_I^{n,n+1} \\ = ToA^{n,n+1} \quad n \\ = 1, 2, \dots, N$$

$$ToB_1^{n,n+1} = ToB_2^{n,n+1} = \dots = ToB_I^{n,n+1} \\ = ToB^{n,n+1} \quad n \\ = 1, 2, \dots, N$$

$$ToD_1^n = ToD_2^n = \dots = ToD_I^n \\ = ToD^n \quad n \\ = 1, 2, \dots, N$$

$$a_1^{n,n+1} = a_2^{n,n+1} = \dots = a_I^{n,n+1} \quad (18) \\ = a^{n,n+1} \quad n \\ = 1, 2, \dots, N$$

$$b_1^{n,n+1} = b_2^{n,n+1} = \dots = b_I^{n,n+1} \\ = b^{n,n+1} \quad n \\ = 1, 2, \dots, N$$

$$ToH_{1,2}^n = ToH_{2,3}^n = \dots = ToH_{I,1}^n \\ = ToH^n \quad n \\ = 1, 2, \dots, N$$

$$ToH^1 = ToH^2 = \dots = ToH^n = \overline{ToH}$$

۷-۵ توابع بهینه‌سازی

برای هر یک از معیارهای ذکر شده در طراحی زمان‌بندی، تابع هدفی برحسب متغیرهای تصمیم‌گیری ساخته می‌شود که در بهینه‌سازی به دنبال یافتن راه‌حلی هستیم که به ازای آنها مقدار این توابع، حداقل یا حداکثر خواهد شد. این سه تابع به شرح زیر هستند که با یکدیگر در تضاد بوده و به دنبال حداقل کردن همزمان آنها هستیم:

$$F_1 = \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} * B_i^n * ToH_{i,i+1}^n \right. \\ \left. + \frac{d_{n,n+1}}{a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} * (ToA_i^{n,n+1} \right. \\ \left. + ToB_i^{n,n+1}) + ToD_i^n \right\} \quad (19)$$

$$F_2 = \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^{N-1} B_i^n * ToD_i^n$$

با توجه به اینکه قطار در مدت $ToA_i^{n,n+1}$ ثانیه و با شتاب $a_i^{n,n+1}$ متر بر مجذور ثانیه، سرعت خود را به مقدار مشخصی رسانده است، لازم است تا در مدت زمانی و با اندازه شتابی ترمز بگیرد که اندازه حاصل ضرب آنها برابر با اندازه سرعت آن باشد.

ث) کران‌های بالا و پایین مدت زمان شتاب‌گیری، حرکت با سرعت ثابت و ترمز گرفتن قطارها

$$\%w_1 * ToT_i^{n,n+1} \leq ToA_i^{n,n+1} \\ \leq \%w_2 * ToT_i^{n,n+1} \\ 0 \leq ToC_i^{n,n+1} \leq \%w_2 * ToT_i^{n,n+1} \quad (16) \\ \%w_1 * ToT_i^{n,n+1} \leq ToB_i^{n,n+1} \\ \leq \%w_2 * ToT_i^{n,n+1}$$

با توجه به اینکه قطار نمی‌تواند در کل فاصله بین دو ایستگاه، در حال شتاب‌گیری یا حرکت با سرعت ثابت و یا ترمز گرفتن باشد، مقدار کران بالای زمان این اعمال را درصدی از کل زمان سفر بین دو ایستگاه در نظر می‌گیریم. کران پایین هم به همین صورت در نظر گرفته شده است تا مقادیر شتاب‌گیری و ترمز‌گیری (از آنجایی که سریعترین حالت سفر بین دو ایستگاه، شتاب‌گیری و ترمز‌گیری بدون حرکت با سرعت ثابت در کل فاصله بین دو ایستگاه است) به حد غیر منطقی کم نباشند. اما از آنجایی که لزومی ندارد قطار حتماً مقداری از مسیر را بدون شتاب حرکت کند، کران پایین $ToC_i^{n,n+1}$ را صفر در نظر می‌گیریم.

ج) کران بالای مجموع مسافت‌های شتاب‌گیری و ترمز قطار

$$\frac{1}{2} a_i^{n,n+1} (ToA_i^{n,n+1})^2 \\ + \frac{1}{2} b_i^{n,n+1} (ToB_i^{n,n+1})^2 \quad (17) \\ + (a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1}) \\ * ToB_i^{n,n+1} \leq d_{n,n+1}$$

مجموع مسافتی که هر قطار در ابتدای حرکت خود در بین دو ایستگاه شتاب می‌گیرد و مسافتی که در انتهای حرکت خود ترمز می‌گیرد، نباید از فاصله بین آن دو ایستگاه بیشتر باشد.

۶-۵ فرضیات مسئله

فرضیات مسئله به شرح زیر است:

(۱۸)، روابط (۱۹) و (۲۰)، به شکل رابطه (۲۱) ساده می‌شوند.

$$F_1 = \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{d_{n,n+1}}{a^{n,n+1} * ToA^{n,n+1}} - \frac{1}{2} * (ToA^{n,n+1} + ToB^{n,n+1}) + ToD^n \right]$$

$$F_2 = \sum_{n=1}^{N-1} B^n * ToD^n$$

$$F_3 = \sum_{n=1}^{N-1} \left(M + m * \frac{C_T}{2} * \left[\frac{1}{2} (a^{n,n+1} + f_k * g) * a^{n,n+1} * (ToA^{n,n+1})^2 + f_k * g * a^{n,n+1} * ToA^{n,n+1} * ToC_i^{n,n+1} + (b_i^{n,n+1} - f_k * g) * ToB_i^{n,n+1} * \left(\frac{1}{2} * ToB_i^{n,n+1} + a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1} \right) \right] \right) \quad (21)$$

$$B^n = Or^n * \overline{ToH}$$

۸-۵ تنظیم پارامترهای الگوریتم NSGA-II و جمعیت

اولیه بهینه‌سازی

در این مطالعه از محیط نرم‌افزار Matlab 2013 برای پیاده‌سازی روند بهینه‌سازی استفاده شده است. الگوریتم NSGA-II دارای پارامترهایی است که بسته به نوع مسئله باید تنظیم شوند. بحث تنظیم پارامترهای الگوریتم برای هر مسئله، خود می‌تواند مطالعه جداگانه ای باشد.

در این مطالعه با استفاده از تحلیل حساسیت (Sensitivity Analysis) به صورت تجربی و آزمون و خطا، الگوریتم به کرار با تنظیمات مختلف اجرا شد و سرعت همگرایی، سرعت حذف راه حل های رتبه های پایین تر و سطوح ترسیم شده پارتو در هر اجرا مورد ارزیابی قرار گرفت و با یکدیگر مقایسه شد تا

$$F_3 = \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^{N-1} \left(M + m * \frac{C_T}{2} * \left[\frac{1}{2} (a_i^{n,n+1} + f_k * g) * a_i^{n,n+1} * (ToA_i^{n,n+1})^2 + f_k * g * a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1} * ToC_i^{n,n+1} + (b_i^{n,n+1} - f_k * g) * ToB_i^{n,n+1} * \left(\frac{1}{2} * ToB_i^{n,n+1} + a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1} \right) \right] \right)$$

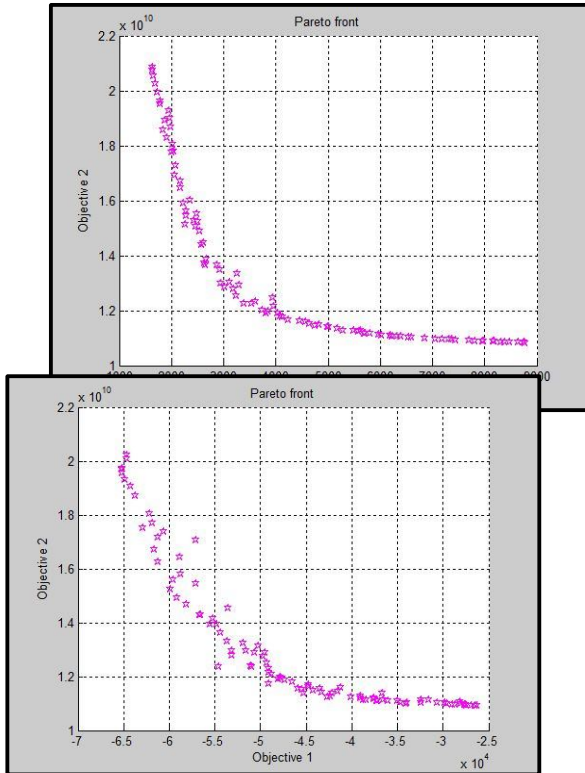
تابع اول (تابع زمان)، مدت‌زمان سفر مسافران را محاسبه می‌کند که باید حداقل شود. در این عبارت، $\frac{1}{2} * B_i^n * ToH_{i,i+1}^n$ میانگین مدت‌زمان انتظار مسافران بر روی سکو در ایستگاه n -ام برای رسیدن قطار i -ام است که B_i^n از رابطه (۲۰) به دست می‌آید؛ ToD_i^n مدت‌زمان توقف قطار i -ام در ایستگاه n -ام بوده و باقی عبارت بیانگر مدت‌زمان سفر قطار بین دو ایستگاه n -ام و $n+1$ -ام است.

تابع دوم (تابع هزینه)، بیانگر تعداد مسافران سوار شده در هنگام توقف قطارها در ایستگاه‌هاست که به دنبال حداکثرسازی آن هستیم.

تابع سوم (تابع انرژی) نیز انرژی مصرف شده قطارها هنگام حرکت در بین ایستگاه‌هاست که از روابط فیزیک مکانیک در رابطه با کار و نیرو به دست می‌آید و به دنبال حداقل کردن آن هستیم. در این تابع، سه عبارت داخل کروشه که با یکدیگر جمع شده‌اند، به ترتیب انرژی مصرف شده در هنگام شتاب قطار در ابتدای حرکت، در هنگام ثابت نگه داشتن سرعت قطار برای غلبه به نیروی اصطکاک چرخها و ریل و در هنگام ترمز قطار است. عبارت $ToC_i^{n,n+1}$ از رابطه (۹) به دست می‌آید. همچنین در این تابع، در صورتی که وزن هر مسافر در تعداد مسافران ضرب شود، ایجاب می‌کند که برای صرف انرژی کمتر، مسافر کمتر در قطار سوار شود؛ به همین دلیل، به جای تعداد مسافران، نصف ظرفیت قطارها را در نظر گرفته‌ایم.

$$B_i^n = Or^n * ToH_{i-1,i}^n \quad (20)$$

لازم به ذکر است که با توجه به فرضیات ذکر شده در رابطه



در شکل بالا، توابع هدف دوه‌دو در نظر گرفته شده‌اند و به دلیل اینکه بهینه‌سازی به صورت همزمان، هر سه تابع را ارزیابی می‌کند، بنابراین لزوماً سطح پارتو برای دو تابع مشابه با سطح پارتو مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با دو تابع نخواهد بود؛ اگرچه شکل (۵-ب) و (۵-ج) تا حدی به این صورت بوده است. با این حال از نمودارهای فوق می‌توان رابطه همبستگی توابع هدف را به صورت کیفی استخراج کرد.

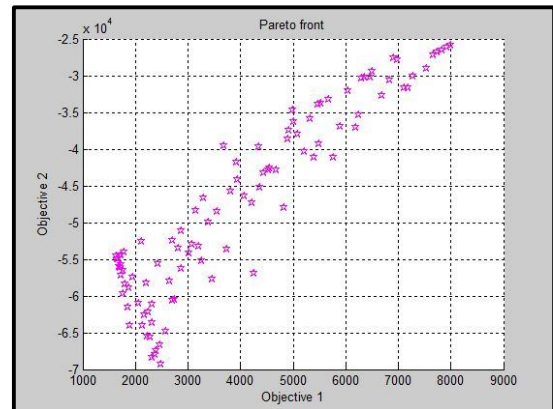
۵-ج) سطح پارتو تابع هزینه (محور X) و تابع انرژی (محور Y)

پس از به دست آوردن راه‌حل‌های رتبه اول الگوریتم NSGA-II، برای سهولت بررسی راه‌حل‌های به دست آمده، و انتخاب راه‌حل ترجیح داده شده، لازم است که تعداد راه‌حلی که در اختیار داریم کمتر شود. با توجه به اینکه از میان تعداد بالای راه‌حل‌های به دست آمده، احتمال توزیع راه‌حل‌ها به صورت خوشه‌ای در سطح پارتو زیاد است. راه‌حل‌های رتبه اول در نسل پایانی الگوریتم بهینه‌سازی با استفاده از تحلیل خوشه‌بندی Fuzzy Subtractive Clustering خوشه‌بندی شدند که مراکز هر خوشه به عنوان راه‌حل نماینده تمام راه‌حل‌های واقع در آن خوشه در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه با تعداد معدودی از

بهترین تنظیمات استخراج شود. در این زمینه همچنین از تجربیات ارائه شده در مقاله دب و همکاران [Deb et al., 2002] درباره بازه مورد قبول هر پارامتر و اینکه افزایش یا کاهش هر کدام چه تغییری در تابع توزیع احتمال پارامترها خواهد داشت، بهره گرفته شده است. مقادیری که برای این پارامترها در تحقیق حاضر در نظر گرفته شده است به شرح جدول (۴) است. همچنین لازم است تا مقادیر اولیه متغیرهای تصمیم‌گیری مشخص باشد. برای تولید جمعیت اولیه، از داده‌های کنونی در کنترل قطارهای خط ۱ متروی تهران استفاده شده است. مقادیر اولیه مدت‌زمان توقف قطارها در ایستگاه‌ها، مدت‌زمان شتاب‌گیری قطارها در شروع حرکت و مدت‌زمان ترمز گرفتن آنها در پایان حرکت، برابر با میانگین این مقادیر که از پیمایش میدانی اندازه‌گیری شده‌اند، در نظر گرفته شده است. همچنین درصدی از حداکثر شتاب قطارها که از اطلاعات فنی قطارها به دست می‌آید را به عنوان مقادیر اولیه شتاب حرکت و ترمز قطارها در نظر می‌گیریم، به طوری که رابطه (۱۵) برقرار باشد.

۶. نتایج و بحث

بهینه‌سازی متغیرهای تصمیم‌گیری به روش ذکر شده در بخش (۵) انجام شد و تعداد ۱۰۰ راه‌حل به عنوان راه‌حل‌های الگوریتم NSGA-II به دست آورده شد. سطوح پارتو توابع هدف به صورت دو به دو در شکل (۵) ارائه شده است.



۵-الف) سطح پارتو تابع زمان (محور X) و تابع هزینه (محور Y)

۵-ب) سطح پارتو تابع زمان (محور X) و تابع انرژی (محور Y)

بهبودسازی زمان بندی حرکت و توقف قطارهای مترو با استفاده از الگوریتم NSGA-II برای کاهش زمان سفر و افزایش کارایی اقتصادی و زیست محیطی سیستم

شده است. زمان بندی کنونی به این صورت در نظر گرفته شده است که ابتدا با استفاده از برداشت میدانی و اطلاعات فنی قطارها، میانگین متغیرهای تصمیم گیری اندازه گیری شد و سپس مدت زمان شتاب و ترمز گرفتن قطارها در بین هر دو ایستگاه متوالی، به نسبت فاصله آن دو ایستگاه به فاصله میانگین ایستگاهها، در نظر گرفته شد

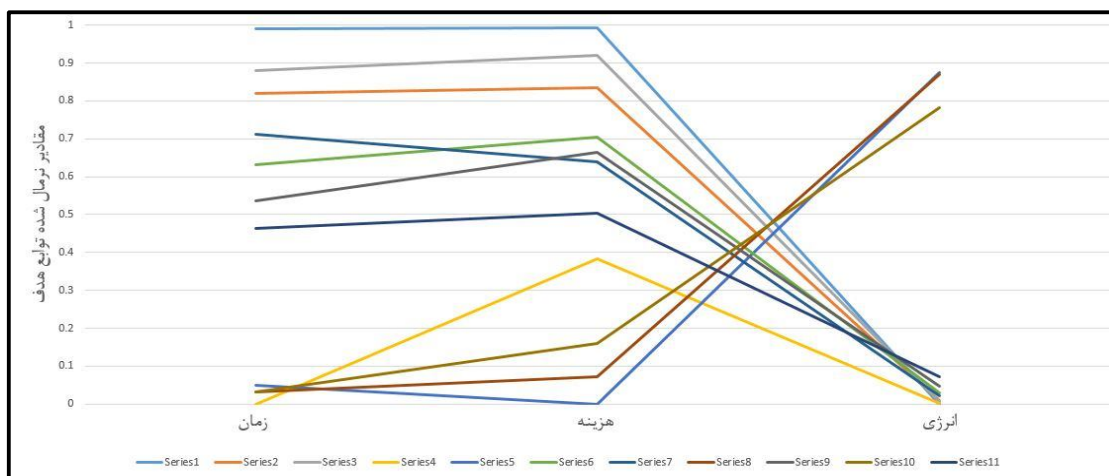
راه حل ها سر و کار خواهیم داشت. با آزمون و خطا برای استخراج مراکز خوشه های غیر مشابه، در خوشه بندی Fuzzy Subtractive Clustering مقدار شعاع نفوذ برابر با ۰/۴۲ در نظر گرفته شده است که با چنین شعاع نفوذی، ۱۱ خوشه به دست می آید. مقادیر توابع هدف به ازای راه حل های خوشه بندی شده و همچنین به ازای زمان بندی کنونی، در جدول (۵) ارائه

جدول ۴. تنظیم پارامترهای الگوریتم NSGA-II و جمعیت اولیه الگوریتم برای بهبودسازی جدول زمان بندی

مقدار اولیه	متغیر تصمیم گیری	مقدار	پارامتر
۳۷ ثانیه	$ToA_i^{n,n+1}$	۱۰۰	اندازه جمعیت
۲۱ ثانیه	$ToB_i^{n,n+1}$	۰/۸	احتمال ترکیب
۲۲ ثانیه	ToD_i^n	۰/۰۱	احتمال جهش
۰/۷ متر بر مجذور ثانیه	$a_i^{n,n+1}$	۵۰۰	حداکثر تعداد نسل ها
۱/۲۳ متر بر مجذور ثانیه	$b_i^{n,n+1}$		

جدول ۵. توابع هدف به ازای راه حل های خوشه بندی شده الگوریتم NSGA-II با استفاده از تحلیل Fuzzy Subtractive Clustering

مقدار توابع هدف به ازای راه حل های به دست آمده از Fuzzy Subtractive Clustering						راه حل
انرژی ($\times 10^{10}$)		هزینه ($\times 10^4$)		زمان ($\times 10^3$)		
۰/۰۰۰	۱/۰۸۷	۰/۹۹۳	-۲/۵۶۳	۰/۹۹۰	۸/۵۲۱	۱
۰/۰۰۹	۱/۰۹۴	۰/۸۳۶	-۳/۱۱۶	۰/۸۲۱	۷/۳۵۵	۲
۰/۰۰۶	۱/۰۹۱	۰/۹۲۰	-۲/۸۲۰	۰/۸۷۹	۷/۷۵۲	۳
۱	۱/۹۴۴	۰/۳۸۳	-۴/۷۱۰	۰	۱/۶۷۱	۴
۰/۸۷۶	۱/۸۳۸	۰/۰۰۰	-۶/۰۵۶	۰/۰۵۰	۲/۰۱۸	۵
۰/۰۲۹	۱/۱۱۱	۰/۷۰۴	-۳/۵۸۰	۰/۶۳۲	۶/۰۴۵	۶
۰/۰۲۳	۱/۱۰۷	۰/۶۴۰	-۳/۸۰۶	۰/۷۱۱	۶/۵۹۴	۷
۰/۸۶۹	۱/۸۳۲	۰/۰۷۳	-۵/۷۹۹	۰/۰۳۲	۱/۸۱۹	۸
۰/۰۴۶	۱/۱۲۶	۰/۶۶۵	-۳/۷۱۶	۰/۵۳۷	۵/۳۸۵	۹
۰/۷۸۲	۱/۷۵۷	۰/۱۵۹	-۵/۴۹۶	۰/۰۳۳	۱/۹۰۲	۱۰
۰/۰۷۲	۱/۱۴۸	۰/۵۰۳	-۴/۲۸۷	۰/۴۶۳	۴/۸۷۲	۱۱
مقدار توابع هدف به ازای زمان بندی کنونی						راه حل
انرژی ($\times 10^{10}$)		هزینه ($\times 10^4$)		زمان ($\times 10^3$)		
۱/۲۸۶		-۴/۶۵۶		۳/۱۱۵		زمان بندی کنونی



شکل ۶: توابع هدف به ازای مراکز خوشه‌های به دست آمده از تحلیل Fuzzy Subtractive Clustering

در مرحله بعد، برای سهولت انتخاب راه‌حل ترجیح داده شده از راه‌حل‌های کاندید، مقادیر توابع هدف جدول فوق را ترسیم می‌کنیم. با توجه به اینکه مقیاس سه تابع هدف با یکدیگر یکسان نبوده، برای ترسیم هر سه آنها در یک نمودار، لازم است تا مقادیر آنها را بین بازه صفر و یک نرمال کنیم. بنابراین مقدار توابع هدف به ازای تمام راه‌حل‌های خوشه‌بندی شده بین بازه صفر و یک نرمال شده و در جدول (۵) و در شکل (۶) رسم شده‌اند.

برای انتخاب راه‌حل ترجیح داده شده با توجه به اولویت‌های سیاست‌گذاری، توابع هدف را وزن‌دهی می‌کنیم؛ به این شکل که با توجه به اهمیت هر کدام از توابع هدف، یک ضریب وزنی مثبت به هر کدام از آنها اختصاص می‌دهیم، به طوری که مجموع وزن‌های سه تابع برابر با یک شود. سپس مقادیر توابع هدف را به ازای هر راه‌حل با وزن‌های اختصاص داده شده به آنها، مطابق با رابطه (۲۲) با یکدیگر جمع می‌کنیم. لازم به ذکر است که به علت یکسان نبودن مقیاس توابع هدف، پیش از محاسبه مجموع وزنی لازم است تا مقادیر توابع هدف نرمال شود و بنابراین همه آنها را بین بازه صفر و یک نرمال می‌کنیم. پس از به دست آوردن مقادیر \emptyset برای تمام راه‌حل‌ها، راه‌حلی به عنوان راه‌حل ترجیح داده شده برگزیده می‌شود که مقدار تابع هزینه \emptyset به ازای آن کمترین مقدار ممکن شود. با تغییر در نحوه وزن‌دهی بنا به

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مقادیر تغییرات توابع هدف از خوشه‌ای به خوشه دیگر، مطابق با شکل (۵) است. علت استفاده از Fuzzy Subtractive Clustering این امر است که در تحلیل‌های رایج مانند K-Means، مراکز به دست آمده، مرکز جرم خوشه‌ها است و بنابراین با توجه به شکل هندسی سطح پارتو، این مرکز خارج از سطح پارتو قرار می‌گیرد و بنابراین راه‌حل کاندید برای راه‌حل نهایی، خارج از سطح پارتو خواهد بود که این به این معنی است که راه‌حل ترجیح داده شده، راه‌حل بهینه پارتو نخواهد بود؛ اما در تحلیل Fuzzy Subtractive Clustering، دو قابلیت مثبت وجود دارد.

اول آنکه خوشه‌بندی به حالت فازی بوده و راه‌حل‌ها به صورت مطلق در یک خوشه قرار ندارند. دوم آنکه از آنجایی که نگرش این تحلیل در این است که هر کدام از راه‌حل‌ها، خود به صورت بالقوه می‌توانند به عنوان مرکز خوشه‌ها باشند، بنابراین مراکز به دست آمده از خوشه‌ها، بر روی خود راه‌حل‌ها منطبق بوده

بنابراین این اطمینان وجود دارد که راه‌حل‌های کاندید به دست آمده از تحلیل خوشه‌بندی، خودشان منطبق بر سطح پارتو هستند و بنابراین هر کدام از راه‌حل‌ها، خود یک راه‌حل بهینه پارتو هستند.

ایستگاه مورد مطالعه برحسب زمان در شکل (۷) رسم شده است. پروفیل سرعت قطارها با توجه به زمان‌بندی کنونی نیز در همین شکل ملاحظه می‌شود. همچنین مقادیر شتاب تندشونده و کندشونده قطار در بین ایستگاه‌ها، در جدول (۸) ارائه شده‌اند. همان‌طور که در شکل (۷) ملاحظه می‌شود، راه‌حل ترجیح داده شده، باعث کاهش زمان سفر قطار از ایستگاه اول تا آخر نسبت به حالت کنونی می‌شود و به همین دلیل توانسته زمان سفر مسافران را تا ۶/۲ درصد کاهش دهد.

۷. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مطالعه، پس از بررسی پیشینه و مبانی نظری تحقیق، روشی به عنوان مدل‌سازی و بهینه‌سازی زمان‌بندی حرکت قطارهای مترو طراحی و پیشنهاد داده شد. این روش با هدف کاهش همزمان زمان سفر مسافران مترو، هزینه‌های تمام شده برای شرکت بهره‌برداری مترو و انرژی مصرف شده پیاده‌سازی شد. نتایج به دست آمده از روش پیشنهاد شده، در بخش ۶ ارائه گردید و بحث روی آنها صورت گرفت. با بررسی نتایج به دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت:

- روش ارائه شده در این تحقیق، مجموعه‌ای از راه‌حل‌های بهینه را در اختیار مدیر و تصمیم‌گیرنده می‌گذارد. با توجه به اینکه استفاده از فاصله ازدحامی از ویژگی‌های الگوریتم NSGA-II به شمار می‌رود، تصمیم‌گیرنده با در دست داشتن طیف متنوعی از پاسخ‌ها، می‌تواند بسته به اهمیت هر کدام از سه معیار زمان سفر، هزینه و انرژی مصرف شده در شرایط مختلف، راه‌حل ترجیح داده شده را برگزیند.
- راه‌حل ترجیح داده شده در این مطالعه برای زمان‌بندی حرکت و توقف قطارها زمان سفر مسافران را ۶/۲ درصد کاهش، هزینه ناشی از خالی ماندن ظرفیت قطارها را ۱۰/۰۹ درصد کاهش و انرژی مصرف شده را ۶/۱۴ افزایش می‌دهد.
- الگوریتم مورد نظر پس از ۳۱۳ دور تکرار به همگرایی رسید که با توجه به تعداد بالای متغیرهای تصمیم‌گیری و پیچیدگی توابع تعریف شده، می‌توان آن را قابل قبول دانست.

اولویت‌های سیاست‌گذاری، می‌توان راه‌حل‌های ترجیح داده شده در شرایط گوناگون را انتخاب کرد. در این مطالعه با اختصاص وزن‌های مختلف به توابع هدف در سناریوهای مختلف و بررسی راه‌حل‌ها با در نظر گرفتن این وزن‌ها، مقادیر محاسبه شده مجموع وزنی رابطه (۲۲) برای تمام راه‌حل‌های رتبه اول نسل آخر الگوریتم بهینه‌سازی محاسبه می‌کنیم که نهایتاً راه‌حل ترجیح داده شده با کمترین مقدار \emptyset انتخاب شده است. راه‌حل ترجیح داده شده در مقایسه با زمان‌بندی کنونی در جدول (۷) ملاحظه می‌شود.

$$\emptyset = w_T * Ti + w_C * Co + w_E * En \quad (22)$$

جدول ۶. اختصاص ضریب وزنی به توابع هدف

تابع هدف	نماد تابع	نماد وزن تابع
زمان سفر	Ti	w_T
هزینه شرکت بهره‌برداری	Co	w_C
انرژی مصرف شده	En	w_E
$w_T + w_C + w_E = 1$		

جدول ۷. مقادیر توابع هدف به ازای راه‌حل ترجیح داده شده

راه‌حل	مقدار توابع هدف به ازای زمان‌بندی کنونی		
	زمان ($\times 10^3$)	هزینه ($\times 10^4$)	انرژی ($\times 10^1$)
زمان‌بندی ترجیح داده شده	۲/۹۲۲	-۵/۱۲۶	۱/۳۶۵
زمان‌بندی کنونی	۳/۱۱۵	-۴/۶۵۶	۱/۲۸۶
درصد تغییر	-۶/۲۰	-۱۰/۰۹	+۶/۱۴

راه‌حل ترجیح داده شده در مقایسه با راه‌حل کنونی، زمان سفر و هزینه ناشی از خالی ماندن ظرفیت قطارها را به ترتیب تا ۶/۲۰ و ۱۰/۰۹ درصد کاهش و انرژی مصرف شده را تا ۶/۱۴ درصد افزایش داده است.

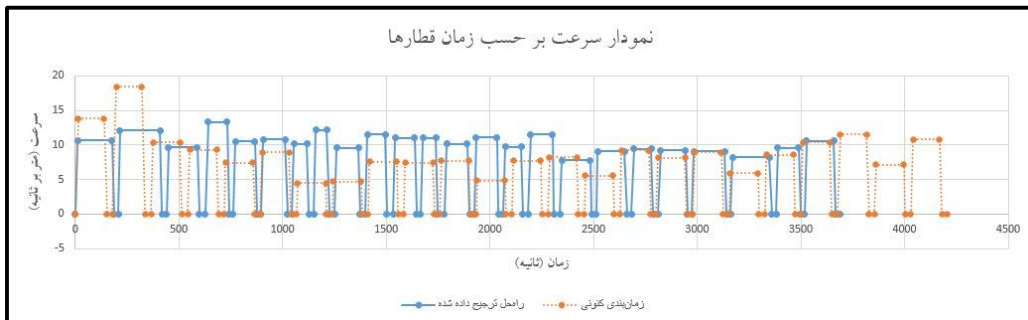
برای راه‌حل ترجیح داده شده، پروفیل سرعت قطار در بین ۲۵

نقش مهمی دارد و بهینه کردن این زمان می‌تواند در کاهش ظرفیت‌های خالی مانده کمک شایانی کند؛ دوما تأثیر زمان‌بندی شتاب و ترمز قطارها در بهبود مصرف انرژی و افزایش رضایت مسافران و کاهش هزینه‌ها در نظر گرفته نشده است. در صورتی که با انجام تحلیل حساسیت و تغییر هر کدام از متغیرهای تصمیم‌گیری با ثابت نگه داشتن سایر متغیرها و در سناریوهای مختلف، ملاحظه می‌شود که تغییر موارد فوق در کیفیت همزمان زمان سفر، هزینه‌ها و انرژی مصرف شده، تأثیر به‌سزایی دارد.

با توجه به ساده‌سازی‌ها و محدودیت‌های این مطالعه، پیشنهاداتی در راستای بهبود عملکرد روش پیشنهاد شده به عنوان مطالعات آتی قابل ذکر هستند. به عنوان مثال متغیرهای تصمیم‌گیری می‌توانند به ازای قطارهای مختلف، متفاوت باشند، تعداد قطارها به عنوان متغیر تصمیم‌گیری وارد بهینه‌سازی شود، در زمان‌بندی، به همزمانی شتاب‌گیری و ترمز گرفتن قطارهای متوالی توجه شود و خطوط متروی تهران به صورت شبکه و دو جهته مدلسازی شود تا اثر این فرضیات در مطالعات آینده مورد بررسی قرار بگیرد.

لازم به توضیح است که با مقایسه جواب‌های به دست آمده از چندین اجرای الگوریتم به صورت کامل و خوشه بندی راه‌حل‌ها به وسیله تحلیل K-Means، ملاحظه شد که توابع هدف به ازای خوشه‌های به دست آمده در اجراهای متفاوت دارای تغییرات قابل توجه نبوده و بنابراین تکرارپذیری روش استفاده شده، قابل قبول قلمداد شد.

- علاوه بر موارد ذکر شده، با انجام تحلیل حساسیت^{۲۷} صورت گرفته در این تحقیق با هدف بررسی تأثیر مقدار متغیرهای تصمیم‌گیری بر مقدار توابع هدف می‌توان نتیجه گرفت که دخالت دادن مدت زمان شتاب و ترمز قطارها و بنابراین اندازه شتاب قطارها، در روند زمان‌بندی حرکت قطارها لازم است. زمان‌بندی خطوط مترو معمولاً تنها براساس تراکم جمعیت مسافران صورت می‌پذیرد و مسئله هزینه به عنوان محدودیتی مانند تعداد محدود و مشخص قطارهای فعال در خط، وارد مسئله می‌شود و یک حد میانه بین هزینه و رضایت مسافران در نظر گرفته می‌شود. حال آنکه در عمل کردن به این شیوه، اولاً به این مسئله توجه نشده است که زمان دقیق رسیدن قطار به ایستگاه و حرکت آن از ایستگاه، در تعداد ظرفیت خالی مانده قطار مذکور که معیاری از هزینه تحمیل شده بر شرکت بهره‌برداری مترو است،



شکل ۵. نمودار سرعت قطارها (متر بر ثانیه) بر حسب زمان (ثانیه) در بین ایستگاه‌های مختلف به ازای زمان‌بندی ترجیح داده شده و زمان‌بندی کنونی

جدول ۸. مقادیر شتاب تندشونده و کندشونده قطار در بین ایستگاه‌ها

ایستگاه	شتاب حرکت (متر بر مجذور ثانیه)	شتاب ترمز (متر بر مجذور ثانیه)	ایستگاه	شتاب حرکت (متر بر مجذور ثانیه)	شتاب ترمز (متر بر مجذور ثانیه)
شهرری - جوانمرد قصاب	۰/۶۸۰	۰/۷۸۸-	طالقانی - هفت تیر	۰/۹۶۹	۰/۷۴۴-
جوانمرد قصاب - علی آباد	۱/۳۹۹	۲/۱۱۷-	هفت تیر - شهید مفتاح	۱/۱۹۶	۱/۱۰۲-
علی آباد - خزانه	۰/۷۸۶	۰/۷۹۲-	شهید مفتاح - شهید بهشتی	۰/۷۳۱	۱/۳۰۳-
خزانه - ترمینال جنوب	۱/۱۲۳	۱/۶۰۴-	شهید بهشتی - مصلی	۱/۱۴۰	۱/۸۷۰-
ترمینال جنوب - شوش	۱/۰۷۹	۲/۳۰۹-	مصلی - شهید همت	۰/۷۴۲	۰/۶۱۷-
شوش - مولوی	۱/۰۳۱	۱/۴۹۴-	شهید همت - شهید حقانی	۱/۲۰۰	۱/۰۸۲-
مولوی - خیام	۱/۱۳۶	۱/۳۱۰-	شهید حقانی - میرداماد	۰/۹۷۶	۱/۰۳۰-
خیام - پانزده خرداد	۱/۲۲۹	۰/۷۵۸-	میرداماد - دکتر شریعتی	۱/۰۹۶	۰/۸۳۵-
پانزده خرداد - امام خمینی	۱/۸۲۱	۰/۸۴۷-	دکتر شریعتی - قلهک	۱/۹۶۳	۰/۸۷۹-
امام خمینی - سعدی	۱/۱۴۷	۱/۱۸۲-	قلهک - شهید صدر	۰/۷۷۰	۰/۶۲۷-
سعدی - دروازه دولت	۱/۲۱۰	۱/۰۰۹-	شهید صدر - قیطریه	۱/۳۵۸	۱/۳۰۶-
دروازه دولت - طالقانی	۱/۰۸۴	۱/۱۷۴-	قیطریه - تجریش	۱/۱۱۶	۱/۱۰۰-

- 16 Bounded Objective Function Approach
- 17 Population-based Approaches
- 18 Vector Evaluated Genetic Algorithm
- 19 Pareto-based Approaches
- 20 Multi-objective Genetic Algorithm
- 21 Non-dominated Sorting Genetic Algorithm
- 22 Strength Pareto Evolutionary Algorithm
- 23 Niche Pareto Genetic Algorithm
- 24 Multi-objective Particle Swarm Optimization
- 25 Crowding Distance
- 26 Binary Tournament
- 27 Sensitivity Analysis

۸. پی‌نوشت‌ها

- 1 Multi-Criteria Problem
- 2 Multi-Objective Evolutionary Algorithms
- 3 Non-dominated Answers
- 4 Pareto Front
- 5 Weighted Sum
- 6 Cooperative Scheduling Model
- 7 Mass Rapid Transit
- 8 Maximum Traction Power
- 9 Train Operations Model
- 10 Decision Variables Vector
- 11 Objective Functions Vector
- 12 Gradient-based Algorithm
- 13 Simulated Annealing Algorithm
- 14 Trade-off
- 15 Aggregating Function Approach

of regenerative energy of braking in electrical railway systems”, Power Electronics Electrical Drives Automation and Motion (SPEEDAM), 2010 International Symposium on, 14-16 June, Pisa, Italy, PP. 1218-1221.

-Niu, H. and Zhou, X. (2013) “Optimizing urban rail timetable under time-dependent demand and oversaturated conditions”, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, Vol. 36, pp. 212-230.

-rajabi, m. r., (2010) “spatial decision Making in urban planning using Multi-Objective Evolutionary Algorithms in GIS”, Master of Engineering Thesis in GIS, Geodesy and Geomatic Engineering Department, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

-Saadatseresht, M., Mansourian, A. and Taleai, M. (2009) “Evacuation planning using multiobjective evolutionary optimization approach”, European Journal of Operational Research, Vol. 198, No. 1, pp. 305-314.

-Sels, P., Dewilde, T., Cattrysse, D. and Vansteenwegen, P. (2013) “Expected passenger travel time as objective function for train schedule optimization”, Proceedings of 5th International Seminar on Railway Operations Modelling and Analysis (IAROR): RailCopenhagen2013, May 13-15, Copenhagen, Denmark.

-Su, Sh., Li, X., Tang, T. and Gao, Z. (2013) “A subway train timetable optimization approach based on energy-efficient operation strategy”, Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on, Vol. 14, No. 2, pp. 883-893.

-Yang, X., Li, X., Gao, Z., Wang, H. and Tang, T. (2013) “A Cooperative scheduling model for timetable optimization in subway systems”, Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on, Vol. 14, No. 1, pp. 438-447.

-Yang, X., Ning, B., Li, X. and Tang, T. (2014) “A two-objective timetable optimization model in subway systems”, intelligent transportation systems, IEEE Transactions on, Vol. 15, No. 5, pp. 1913-1921.

-Chang, C. S. and Kwan, C.M. (2004) “Evaluation of evolutionary algorithms for multi-objective train schedule optimization”, 17th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence, Cairns, Australia, pp. 803-815.

-Chen, J. F., Lin, R. L. and Liu, Y. C. (2005) “Optimization of an MRT train schedule: reducing maximum traction power by using genetic algorithms”, Power Systems, IEEE Transactions on, Vol. 20, No. 3, pp. 1366-1372.

-Chen, M. C. and Wei, Y. (2011) “Exploring time variants for short-term passenger flow”, Journal of Transport Geography, Vol. 19, No. 4, pp. 488-498.

-Chevrier, R., Pellegrini, P. and Rodriguez, J. (2013) “Energy saving in railway timetabling: A bi-objective evolutionary approach for computing alternative running times”, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, Vol. 37, pp. 20-41.

-Coello, C. A. C. and Lamont, G. B. (2004) “Applications of multi-objective evolutionary algorithms”, World Scientific Pub Co Inc, Chapter 1: “An introduction to multi-objective evolutionary algorithms and their applications”.

-Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. and Meyerivan, T. (2002) “A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II”, Evolutionary Computation, IEEE Transactions on, Vol. 6, No. 2, pp. 182-197.

-Hu, H., Li, K. and Xu, X. (2013) “A multi-objective train-scheduling optimization model considering locomotive assignment and segment emission constraints for energy saving”, Journal of Modern Transportation, Vol. 21, No. 1, pp. 9-16.

Justesen, P. D. (2009) “Multi-objective optimization using evolutionary algorithms”, 5th International Conference, EMO 2009, Nantes, France, pp. 525-539.

-Khoshamooz, G. (2011) “Development of a spatial Multiple Objective decision Making model for industrial planning”, Master of Engineering Thesis in GIS, Geodesy and Geomatic Engineering Department, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

-Nasri, A., Moghadam, M. F. and Mokhtari, H. (2010) “Timetable optimization for maximum usage

۹. پیوست‌ها

$$e_{c_i}^{n,n+1} = f_k * g * a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1} * ToC_i^{n,n+1} * (M + m * (P_i^{n,n+1})) \quad (25)$$

به علت اینکه $(P_i^{n,n+1})$ در تابع هدف، ایجاب می‌کند که برای صرف انرژی کمتر، مسافر کمتر در قطار سوار شود، به جای تعداد مسافران، نصف ظرفیت قطارها را در نظر می‌گیریم. بنابراین تابع هدف سوم برابر است با:

$$F_3 = \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^{N-1} \left(M + m * \frac{C_T}{2} * \left[\frac{1}{2} (a_i^{n,n+1} + f_k * g * a_i^{n,n+1} * (ToA_i^{n,n+1})^2) + f_k * g * a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1} * ToC_i^{n,n+1} + (b_i^{n,n+1} - f_k * g) * ToB_i^{n,n+1} * \left(\frac{1}{2} * ToB_i^{n,n+1} + a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1} \right) \right] \right) \quad (26)$$

با توجه به فرضیات مسئله مبنی بر یکسان بودن نحوه کنترل قطارها در بین دو ایستگاه مشخص، تابع هدف به صورت زیر ساده‌سازی می‌شود.

$$F_3 = \sum_{n=1}^{N-1} \left(M + m * \frac{C_T}{2} * \left[\frac{1}{2} (a^{n,n+1} + f_k * g) * a^{n,n+1} * (ToA^{n,n+1})^2 + f_k * g * a^{n,n+1} * ToA^{n,n+1} * ToC^{n,n+1} + (b^{n,n+1} - f_k * g) * ToB^{n,n+1} * \left(\frac{1}{2} * ToB^{n,n+1} + a^{n,n+1} * ToA^{n,n+1} \right) \right] \right)$$

پیوست الف) نحوه تشکیل تابع هدف انرژی:

انرژی مصرف‌شده برای شتاب‌گیری قطار i -ام در واحد وزن و زمان برابر با e_{ai} در نظر گرفته می‌شود. اگر فرض کنیم قطار i -ام در بین ایستگاه n و $n+1$ به مدت $ToA_i^{n,n+1}$ در حال شتاب گرفتن بوده است، انرژی مصرف‌شده آن $(e_{a_i}^{n,n+1})$ برابر است با:

$$e_{a_i}^{n,n+1} = \frac{1}{2} (a_i^{n,n+1} + f_k * g) * a_i^{n,n+1} * (ToA_i^{n,n+1})^2 * (M + m * (P_i^{n,n+1})) \quad (23)$$

که در آن f_k ضریب اصطکاک لغزشی (جنبشی) چرخ‌های قطار با ریل بوده و g شتاب گرانش است. همچنین M و m ترتیب وزن هر قطار بدون مسافر و وزن هر مسافر است. $P_i^{n,n+1}$ نیز معرف تعداد مسافران درون قطار i -ام در فاصله ایستگاه n و $n+1$ است. به همین ترتیب، انرژی مصرف‌شده برای قطار i -ام در بین ایستگاه‌های n و $n+1$ برای ترمز گرفتن $(e_{b_i}^{n,n+1})$ برابر است با:

$$e_{b_i}^{n,n+1} = (b_i^{n,n+1} - f_k * g) * ToB_i^{n,n+1} * \left(\frac{1}{2} * ToB_i^{n,n+1} + a_i^{n,n+1} * ToA_i^{n,n+1} \right) * (M + m * (P_i^{n,n+1})) \quad (24)$$

به همین ترتیب انرژی لازم برای ثابت نگه داشتن سرعت قطار در حرکت بدون شتاب در فاصله بین دو ایستگاه n و $n+1$ برابر است با: