پاسخ شبه‌استاتیکی روسازی آسفالتی لایه‌ای با رفتار ویسکوالاستیک به روش المان دیفرانسیل کوادرچر

سینا رامش‌خواه، دانش‌آموختهٔ کارشناسی‌ارشد، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران.

محمود ملکوتی علون‌آبادی (مسئول مکاتبات)، استادیار، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران.

پرویز ملک‌زاده، استاد، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران.

سید حامد معراجی، استادیار، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران.

E-mail: malakooti@pgu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹٦/۰۷/۲٦ پذیرش: ۱۳۹٦/۱۱/۰۱

چکیده

تحلیل پاسخ روسازی راه اعم از جابجایی، کرنش و تنش ناشی از بارهای آنی وارده، یکی از چالش‌های مهم طراحی روسازی است. برای تحلیل عددی این مسئله می‌توان روش‌های متعددی همچون اجزاء محدود، اجزاء مرزی و غیره را به کار گرفت اما از آنجایی‌که در همهٔ مسائل، دقت بیشتر و زمان کمتر رسیدن به پاسخ، انگیزهٔ اصلی است، در این پژوهش، روش نوین دیفرانسیل کوادرچر (DQM) به کار گرفته شده است. در بیشتر پژوهش‌های انجام‌شده تا به امروز، رفتار روسازی انعطاف‌پذیر را به‌صورت الاستیک در نظر گرفته‌اند، درصورتی‌که لایهٔ بتن آسفالتی (AC) سازهٔ روسازی، به‌صورت ویسکوالاستیک رفتار می‌کند. نظریهٔ ویسکوالاستیسیته، یک دیدگاه قدیمی است اما کاربرد آن در مدل‌سازی روسازی انعطاف‌پذیر، با توجه به اثر توام ساختار لایه‌ای روسازی و رفتار ویسکوالاستیک مخلوط آسفالتی، کار مدل‌سازی را پیچیده‌تر می‌سازد. در این پژوهش، نخست، با انتگرال‌گیری افزایشی اصل تطابق بولتزمن و بکارگیری مدل ماکسول-ویچرت تعمیم‌یافته برای رفتار ویسکوالاستیک، معادلات حرکت افزایشی سه‌بعدی تقارن‌محوری بدست می‌آیند و با استفاده از DQM گسسته‌سازی می‌شوند. سپس مثال‌هایی به منظور صحت‌سنجی مدل سه‌بعدی تقارن محوری لایه‌ای با رفتار ویسکوالاستیک خطی با بکارگیری روش المان دیفرانسیل کوادرچر (DQEM)، مدل‌سازی و نتایج حاصل از این روش با حل‌های تحلیلی و نتایج روش اجزا محدود (نرم‌افزار آباکوس) مقایسه می‌گردد. در پایان، سازهٔ روسازی انعطاف‌پذیر با رفتار ویسکوالاستیک خطی تحت بارگذاری سینوسی و به‌صورت شبه‌استاتیکی تحلیل شده و تأثیرات پاسخ ویسکوالاستیک روسازی تحت بارگذاری بار سرعت‌های مختلف وسیلهٔ نقلیه و همچنین تنش و کرنش کششی زیر لایهٔ AC تنش قائم روی بستر و جابجایی قائم سطح روسازی که به طور معمول در طراحی روسازی مورد استفاده قرار می گیرند، بررسی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: روسازی انعطاف‌پذیر، رفتار ویسکوالاستیک خطی، روش المان دیفرانسیل کوادرچر، تحلیل شبه‌استاتیکی

۱. پیشگفتار

پیش‌بینی مقدار پاسخ روسازی انعطاف‌پذیر[1] (جابجایی، کرنش و تنش) ناشـی از بار متحرک، از مهم‌ترین عوامل طراحی روسازی اسـت. به دلیل لایه‌ای بودن روسـازی و همچنین متفاوت بودن خصـوصـیات و رفتار لایه‌های روسازی، محاسبهٔ پاسخ روسازی پیچیده می باشـد. مهندسـان روسازی گرایش فراوانی نسبت به تحلیل روسازی لایه‌ای با رفتار الاستیک مصالح تحت بارگذاری ناشـی از وسیله نقلیه داشته‌اند و از گذشته تا به امروز، در تحلیل مکـانیکی روسـازی، رفتار لایه‌های آسـفالتی را علیرغم رفتار ویسکوالاستیک آن، اغلب به‌صورت الاستیک در نظر گرفته‌اند و پژوهش‌های زیادی به منظور محاسبـهٔ تنش در سازهٔ روسازی با استفاده از تئوری الاستیک لایه‌ای[2] انجام گرفته است.

یکی از نخستین راه‌حل‌های تحلیلی یک‌لایه، روش Boussinesq در سـال ۱۸۸۵ بود کـه رابطـه‌ای را برای اندازهٔ تنش، کرنش و تغییر مکان در یک سـازهٔ یک‌لایهٔ همگن، همسـانگرد و با رفتار الاستیک خطی بدست آورد. تئوری الاستیک لایه‌ای Burmister ، نخسـتین راه‌حل برای سـازه‌های دولایه و سـه‌لایه است که در سـال‌های ۱۹۴۳ و ۱۹۴۵ ارائه شده و همچنین برای نخستین بار در تحلیل روسازی، نظریه‌های مکانیک محیط‌های پیوسته به کار گرفته شـده اسـت و رفتار لایهٔ سـاخته شـده از مخلوط گرم آسـفالتی (Hot-Mix-Asphalt) و لایه‌های با مصالح دانه‌ای، به صـورت الاسـتیک خطی همگن و همسـانگرد فرض شده است [Khavassefat, Jelagin and Birgisson, 2012].

Acum and Fox در سـال ۱۹۵۱ و Jones در سال ۱۹۶۲، جداولی را جهت تعیین تنش شـعاعی و قائم در سـازهٔ روسازی سـه‌لایه ارائه کردند [Huang, 2004]. Schiffman در سـال ۱۹۶۲ یک حل عمومی را به‌منظور برآورد تنش و تغییر مکان در سـازهٔ الاستیک لایه‌ای تحت تنش قائم و مماسـی سطحی، ارائه نمود و بـا بکـارگیری آن، چنـدین برنامهٔ رایانه‌ای نظیر CHEV [Warren and Dieckmann, 1963]، DAMA [Hwang and Witczak, 1979]، ELSYM5 [Ahlborn, 1972]، BISAR [De Jong, Peatz and Korswagen, 1973] به‌منظور برآورد تنش و کرنش در تحلیل روسـازی الاستیک لایه‌ای ایجاد شد.

Duncan, Monismith and Wilson در سـال ۱۹۶۸ بـا بکـارگیری تئوری اجزاء محـدود و مـدل‌هـای رفتـاری خطی و غیرخطی، روسـازی الاسـتیک را به صـورت سـه‌بعدی تقارن محوری تحلیل کردند و سپس با استفاده از روش آن‌ها، دو برنامهٔ شـناخته‌شـدهٔ ILLI-PAVE [Raad and Figueroa, 1980] و MICH-PAVE [Harichandran, Baladi and Yeh, 1989] توسـعه یافت. از معایب ذاتی تئوری الاستیک لایه‌ای، می‌توان به دو مورد: **(۱)** در نظر گرفتن مواد HMA بـه‌صـورت جـامـد الاسـتیـک خـالص و **(۲)** در نظر گرفتن بـارگـذاری دایره‌ای به‌صـورت اسـتاتیکی، اشـاره کرد که هر دو مورد مذکور باعث ناکارآمدی تئوری گفته‌شده، می‌شود.

چسبانندهٔ قیری، یک مادهٔ ویسکوز معمولی است و هنگامی‌که با سـنگ‌دانه‌های الاسـتیک آمیخته می‌شود، بتن آسفالتی (AC)[3] را می‌سـازد؛ بنابراین باید انتظار داشـت که AC به گونهٔ مصـالح ویسـکوالاسـتیـک رفتـار کنـد. بنـابراین، در نظر گرفتن اثر ویسـکوالاسـتیک در تحلیل AC، اجتناب‌ناپذیر اسـت. هرچند مفهوم ویسکوالاستیسیته به آغاز صدهٔ ۱۹۰۰ برمی‌گردد، اما تقریباً ابتدای دههٔ ۱۹۶۰ میلادی و در پژوهش Secor و Monismith بود که از تئوری ویسـکوالاسـتیسـیته برای پیش‌بینی رفتار نمونهٔ بتن آسـفالتی در آزمایش فشـاری سـه‌محوری اسـتفاده شـد و مشـخص گردید که فرض رفتار الاسـتیک برای مصالح آسفالتی، فرضی با دقت کافی نیست [Secor and Monismith, 1961].

برخلاف جامدات الاسـتیک، رفتار AC به‌شدت وابسته به دما و فرکـانس بارگذاری اسـت. این ماده، در دمای پایین و فرکانس بـارگذاری بالا، شـبیه به جامدات الاسـتیک و در دمای بالا و فرکانس بارگذاری کم، شـبیه به یک مادهٔ ویسکوز رفتار می‌کند. در دما و فرکانس بارگذاری متوسـط، این ماده، شـبیه به مصـالح ویسـکوالاستیک که معمولاً نشان‌گر سطح قابل‌توجهی از سختی جامدات الاسـتیک اسـت، رفتار می‌کند و درعین‌حال مانند یک جسم ویسکوز، انرژی به دلیل مقاومت اصطکاکی از بین می‌رود. برای مدل‌سـازی این رفتار ویسـکوالاسـتیک وابسـته به زمان، مـدل‌هـای رفتـاری متفـاوتی با آرایش‌های متفاوت فنر و میراگر مـانند مدل‌های ماکسـول–ویچرت تعمیم یافته[4] و مدل کلوین–وُویـت تعمیم یـافتـه[5]، مـدل‌هـای power-law، مـدل‌هـای سـیگموئیدال[6] و غیره به وجود آمده اسـت. اما مشـکل اسـاسی اسـتفاده از این مدل‌ها این اسـت که پاسخ مکانیکی در هر زمان، وابسـته به تمام پاسـخ‌های تنش و کرنش قبلی اسـت و همین مسـئله باعث پیچیده‌تر شـدن تحلیل می‌شود. برای فائق آمدن بر

این مشکل و همچنین لحاظ کردن اثرات دینامیکی و لایه‌های با مشخصات متفاوت، می توان از حل‌های تحلیلی یا عددی استفاده کرد. یکی از معمول‌ترین روش‌های حل تحلیلی مسائل ویسکوالاستیک، استفاده از تبدیلات لاپلاس و فوریه[۷] است که با استفاده از آنها متغیر زمان حذف می‌شود و بعد از حل معادلات، با استفاده از تبدیلات معکوس، پاسخ برای هر زمان دلخواه بدست می‌آید [Siddharthan, Zafir and Norris, 1993؛ Chabot, Chupin, Chen, Pan and Green, 2009؛ Wang, Roesler and Kim, 2011؛ Deloffre et al., 2010؛ Varma and Zhao, Ni, Wang et al., 2014؛ Guo, 2011؛ Kutay, 2016]. اما استفاده از حل تحلیلی برای مسائلی که شرایط مرزی نامناسب دارند و سازه نیز به صورت لایه‌ای باشد، ممکن است عملی نباشد؛ بنابراین برای حل اینگونه مسائل می‌بایست از انتگرال‌گیری عددی استفاده کرد.

تاکنون روش‌های گوناگونی برای مدل‌سازی عددی سازهٔ روسازی انعطاف‌پذیر به‌وسیلهٔ پژوهشگران به کار گرفته شده است. مدل‌سازی عددی، بیان یک پدیدهٔ فیزیکی به زبان ریاضی و بیرون کشیدن معادلات دیفرانسیل حاکم بر پدیده و سپس حل این معادلات است. با بکارگیری روش‌های عددی می‌توان پاسخ سازهٔ روسازی را با هم‌خوانی مناسبی با رفتار واقعی، مدل‌سازی کرد. در حال حاضر روش‌های عددی بسیاری برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر پدیده‌های فیزیکی گسترش یافته که از میان آن‌ها می‌توان به روش‌های اجزاء محدود، اجزاء مرزی، تفاضل محدود، المان مجزا، حجم محدود، بدون شبکه و روش‌های دیگر اشاره کرد.

به منظور تحلیل تنش ویسکوالاستیک پلیمرها و مواد مرکب، محققان در ابتدا، روش مستقیم انتگرال‌گیری گام‌به‌گام تفاضل محدود بین زمان صفر تا زمان کنونی (t) را برای محاسبهٔ تنش و کرنش در هر نقطه استفاده میکردند. اگرچه این روش ساده است، اما نیازمند محاسبهٔ مجدد انتگرال هردیتاری از زمان صفر برای هر گام زمانی و ذخیره‌سازی تاریخچهٔ تنش و کرنش است و می‌تواند برای مسائلی که در مقیاس بزرگ و یا به صورت مواد مرکب پیچیده در نظر گرفته می‌شوند، بسیار زمان‌بر و حتی ناممکن باشد؛ به عنوان مثال پژوهش‌های [Sorvari and Hämäläinen, 2010; Chazal and Pitti, 2012]. بنابراین، استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری مستقیم فقط برای مسائل نسبتاً ساده مناسب است. برخی از پژوهشگران، به منظور حل مسائل پیچیدهٔ سه‌بعدی ویسکوالاستیک، تکنیک‌های انتگرال‌گیری بازگشتی را توسعه دادند؛ به عنوان مثال پژوهش‌های [Simo and Hughes, 1998; Muliana and Khan, 2008]. در این نوع از روش‌ها، یک رابطهٔ بازگشتی از طریق تعریف مدول وادادگی به صورت سری پرونی[۸]، به وجود آمد و همچنین محاسبهٔ تنش در گام زمانی فعلی، نیازمند ذخیرهٔ تمام مقادیر گره‌های زمانی قبلی، که پیش‌تر مورد نیاز در تکنیک‌های انتگرال‌گیری بود، نیست.

در سال ۱۹۹۷، Zocher، Groves و Allen از یک روش متغیر حالت داخلی به منظور تحلیل ویسکوالاستیک مواد ارتوتروپیک نیز استفاده کردند [Zocher, Groves and Allen, 1997]. در الگوریتم پیشنهادی آن‌ها، مقدار یک متغیر حالت، با استفاده از مقدار معلوم آن در گام زمانی قبلی همراه با مقادیر تنش یا کرنش تعیین‌شده در گام زمانی قبلی، محاسبه می‌شود. برای این منظور، آن‌ها معادلات ساختاری انتگرالی را به یک شکل افزایشی جبری (با استفاده از یک روش تفاضل محدود) تبدیل می‌کنند که نتیجهٔ آن، تولید معادلات جبری بازگشتی خطی است. این کار، پیاده‌سازی فرم افزایشی را در فرمولاسیون اجزاء محدود، آسان می‌کند. یکی از تفاوت‌های عمدهٔ پژوهش [Zocher, Groves and Allen, 1997] با دیگر روش‌ها، استفاده از فرض نرخ کرنش ثابت یا تنش ثابت در گام زمانی به جای ثابت فرض‌کردن آن‌ها در کل گام زمانی است. این امر باعث پیش‌بینی بهتر رفتارهای خزش و وادادگی مواد می‌شود. در این پژوهش از الگوریتم [Zocher, Groves and Allen, 1997] برای افزایشی کردن معادلات ساختاری استفاده شده‌است.

برای حل عددی پاسخ روسازی انعطاف‌پذیر، تا به امروز اغلب از روش‌های اجزاء محدود استفاده شده است [Zaghloul and White, 1993؛ Al-Qadi, Wang and Tutumluer, 2010؛ Huang, de Araújo, Soares, de Holanda et al., 2010؛ Abu Al-Rub, Masad et al., 2011؛ Ameri, Malakouti and Malekzadeh, 2014؛ Malakouti, Ameri؛ Malekzadeh, 2014a, 2014b؛ Liu, Wang and Oeser, 2015]، اما در روش اجزاء محدود، برای افزایش دقت، می‌بایست تعداد نقاط شبکه را افزایش داد که باعث افزایش حجم محاسبات و در عمل منجر به کند شدن تحلیل می‌شود، بنابراین ازآنجایی‌که

در تمام مسائل، دقت بیشتر و زمان کمتر رسیدن به جواب، هدف اصلی است، باید از یک روش با دقت بالا و همگرایی سریع استفاده کرد که در این پژوهش از روش نسبتاً نوین دیفرانسیل کوادرچر[9] استفاده شده است.

روش دیفرانسیل کوادرچر یا به‌اختصار DQM، یک روش نسبتاً جدید برای حل معادلات دیفرانسیل است که اولین بار در سال ۱۹۷۱ توسط Bellman و Casti پیشنهاد گردید [Bellman and Casti, 1971] و بعد از آن به‌تدریج به‌عنوان یک روش حل عددی مجزا با سرعت تحلیل بالا، برای حل مسائل مقادیر اولیه و مرزی در علوم فیزیکی و مهندسی به‌کارگرفته شد. در حقیقت، DQM از طریق روش ترتیبی مبتنی بر چندجمله‌ای که یکی از روش‌های وزن‌دار باقی‌مانده (MWR) است، فرمول‌بندی شده است. به‌عنوان یک روش عددی، DQM می‌تواند در زمینه‌های تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه‌ها و غیره استفاده شود؛ به عنوان مثال پژوهش‌های [Farid, Zahedinejad and Malekzadeh, 2010؛Malekzadeh, 2011؛ Malekzadeh and Heydarpour, 2015؛ Keshavarz, Malekzadeh and Hosseini, 2016]. نشان داده شده است که DQM ساده است و می‌تواند با حداقل فعالیت محاسباتی به جواب‌های عددی بسیار دقیق برسد. این روش در مقایسه با روش‌های عددی دیگر، نتایج بسیار دقیق را با تعداد کمتری گره در یک شبکه‌بندی بدست می‌آورد و درنتیجه مسئله با محاسبات کمتری نسبت به سایر روش‌ها تحلیل می‌گردد.

در این پژوهش، روسازی انعطاف‌پذیر با رفتار ویسکوالاستیک خطی تحت بار سینوسی و با استفاده از روش المان دیفرانسیل کوادرچر، تحلیل می‌شود. روند حل مسئلهٔ موردنظر در این پژوهش به این صورت است که در ابتدا معادلات دیفرانسیل افزایشی حاکم بر مسئله با استفاده از تئوری بولتزمن، مدل رفتاری ماکسول-ویچرت تعمیم یافته و روش افزایشی [Zocher, Groves and Allen, 1997]، بدست‌آمده و سپس این معادلات به‌صورت عددی، با استفاده از روش دیفرانسیل کوادرچر حل می‌گردند که نتیجه‌ی آن یافتن مقادیر تغییرمکان‌های شعاعی و قائم، تنش و کرنش‌های شعاعی و قائم در هرلحظه و در هر مکان است. برای رسیدن به این هدف، برنامه‌ای در محیط نرم‌افزار MATLAB فراهم شده است که قادر است با داشتن شرایط مرزی پروفیل روسازی همچون مقدار بار وارده به پروفیل روسازی و ویژگی‌های مکانیکی مصالح و تغییرات بار وارده نسبت به زمان، مقادیر ذکرشده در جهت شعاعی و قائم را در هرلحظه و هر مکان، محاسبه نماید.

۲. الگوریتم انتگرال‌گیری تنش

اصل تطابق بولتزمن [Boltzmann, 1878] (یا انتگرال) را می‌توان برای مسائل تحلیل تنش دوبعدی و سه‌بعدی که در آن‌ها تنش یا کرنش ورودی با گذشت زمان تغییر می‌کند، استفاده کرد. در بعضی اوقات، انتگرال تطابق با عنوان انتگرال دوهامل نیز شناخته می‌شود. رابطهٔ ساختاری تنش-کرنش مصالح ویسکوالاستیک خطی را با بکارگیری اصل تطابق بولتزمن، می‌توان به فرم انتگرال هردیتاری رابطهٔ (۱) نوشت.

$$\sigma_{ij}(t)=\int_0^t E_{ijmn}(t-t')\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial t'}dt' \qquad (۱)$$

که در این رابطه، σ_{ij} و ε_{mn} به ترتیب مولفه‌های تانسور تنش و کرنش هستند و E_{ijmn} تانسور مرتبهٔ چهار مدول وادادگی[10] ارتباط بین تنش و کرنش است و همچنین t زمان از لحظهٔ شروع بارگذاری است.

همان‌طور که در رابطه (۱) مشاهده می شود، تنش در هر لحظه از زمان، نه تنها وابسته به تغییرات کرنش در زمان کنونی است، بلکه به تمام تغییرات آن در تمام گام‌های زمانی قبلی نیز بستگی دارد و به همین دلیل در این پژوهش از الگوریتم افزایشی پژوهش [Zocher, 1995] استفاده شده است. ایدهٔ اساسی الگوریتم انتگرال تنش زوکر، گسسته‌سازی دامنهٔ زمانی به زیربازه‌های کوچک است به‌طوری که در هر گام، باید مقادیر افزایش‌یافتهٔ هرکدام از مجهولات محاسبه شود و به مقادیر بدست آمده در گره زمانی قبلی افزوده شود. فرضیات ذکر شده، در رابطهٔ (۲) بیان شده‌اند.

$$t_{k+1}=t_k+\Delta t$$
$$\sigma_{ij}\big|_{k+1}=\sigma_{ij}\big|_k+\Delta\sigma_{ij} \qquad (۲)$$

که در این روابط، Δt فاصلهٔ زمانی بسیار کوچک بین دو گره زمانی است. فرض می‌شود که تمام مؤلفه‌های تنش (σ_{ij}) در گره زمانی t_k معلوم است و هدف، بدست آوردن مقدار افزایش یافتهٔ آن‌ها بین دو گره زمانی با فاصلهٔ Δt است. بنابراین با جای‌گذاری فرضیات رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱)، می‌توان نوشت.

$$\Delta\sigma_{ij} = \int_0^{t_{k+1}} E_{ijmn}\left(t_{k+1}-t'\right)\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial t'}dt' - \int_0^{t_k} E_{ijmn}\left(t_k-t'\right)\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial t'}dt' \qquad (۳)$$

به‌منظور ساده‌سازی، انتگرال اول رابطهٔ (۳) به دو دامنهٔ زمانی تفکیک می‌شود و با در نظر گرفتن قسمت ویسکوز تحت عنوان $\Delta\sigma_{ij}^{(R)}$، رابطهٔ (٤) حاصل خواهد شد.

$$\Delta\sigma_{ij} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} E_{ijmn}\left(t_{k+1}-t'\right)\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial t'}dt' + \Delta\sigma_{ij}^{(R)} \qquad (٤)$$

که در این رابطه، $\Delta\sigma_{ij}^{(R)}$ با بکارگیری پارامتر ΔE_{ijmn} که اختلاف مدول وادادگی بین دو گره زمانی است، به‌صورت رابطهٔ (٥) تعریف می‌گردد.

$$\Delta\sigma_{ij}^{(R)} = \int_0^{t_k} \Delta E_{ijmn}\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial t'}dt' \qquad (٥)$$

هنگامی‌که از گام‌های زمانی بسیار کوچک استفاده می‌شود، می‌توان فرض کرد که نرخ تغییرات کرنش در طول گام زمانی ثابت است ($\dot{\varepsilon} = \partial\varepsilon/\partial t' = \Delta\varepsilon/\Delta t$). بنابراین رابطهٔ (٤) به فرم رابطهٔ (٦) درمی‌آید.

$$\Delta\sigma_{ij} = \frac{\Delta\varepsilon_{mn}}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} E_{ijmn}\left(t_{k+1}-t'\right)dt' + \Delta\sigma_{ij}^{(R)} \qquad (٦)$$

که در این رابطه، مقدار $E_{ijmn}\left(t_{k+1}-t'\right)$ با بکارگیری مدل ماکسول-ویچرت تعمیم یافته (شکل ۱)، به‌صورت رابطهٔ (۷) تعریف می‌شود.

$$E_{ijmn}\left(t_{k+1}-t'\right) = E_{ijmn}^{(\infty)} + \sum_{p=1}^{N_p} E_{ijmn}^{(p)} e^{\frac{-(t-t')}{\rho_{ijmn}^{(p)}}} \qquad (۷)$$

که در این رابطه $E_{ijmn}^{(\infty)}$، N_p، $E_{ijmn}^{(p)}$ و $\rho_{ijmn}^{(p)} = E_{ijmn}^{(p)}/\eta_{ijmn}^{(p)}$ پارامترهای مدل ماکسول-ویچرت تعمیم یافته هستند.

نهایتا رابطهٔ (٦) با تعریف $\overline{E}_{ijmn}$ به فرم رابطهٔ (۸) درمی‌آید.

$$\Delta\sigma_{ij} = \overline{E}_{ijmn}\Delta\varepsilon_{mn} + \Delta\sigma_{ij}^{(R)} \qquad (۸)$$

که در این رابطه، $\overline{E}_{ijmn}$ تانژانت مدول یانگ[11] بین دو گام زمانی است که به‌صورت رابطهٔ (۹) محاسبه می‌شود.

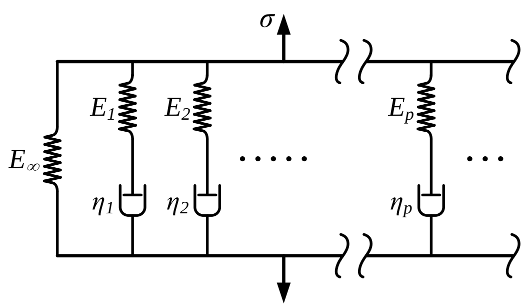
$$\overline{E}_{ijmn} = E_{ijmn}^{(\infty)} + \frac{1}{\Delta t}\sum_{p=1}^{N_p} E_{ijmn}^{(p)}\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_{ijmn}^{(p)}}}\right) \qquad (۹)$$

مقدار ΔE_{ijmn} که پیش‌تر در رابطهٔ (٥) ذکر گردید، با استفاده از رابطهٔ (۱۰) تعیین می‌گردد.

$$\Delta E_{ijmn} = -\sum_{p=1}^{N_p} E_{ijmn}^{(p)} e^{\frac{-(t_k-t')}{\rho_p}}\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_{ijmn}^{(p)}}}\right) \qquad (۱۰)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۱۰) در رابطهٔ (٥)، رابطهٔ (۱۱) بدست می‌آید.

$$\Delta\sigma_{ij}^{(R)} = -\int_0^{t_k}\sum_{p=1}^{N_p} E_{ijmn}^{(p)} e^{\frac{-(t_k-t')}{\rho_{ijmn}^{(p)}}}\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_{ijmn}^{(p)}}}\right)\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial t'}dt' \qquad (۱۱)$$



شکل ۱. مدل رفتاری ماکسول-ویچرت تعمیم یافته.

سپس، با در نظر گرفتن ترم انتگرالی رابطهٔ قبل به صورت پارامتر $S_{ij}^{(p)}\big|_k$، رابطهٔ (۱۲) حاصل خواهد شد.

$$\Delta\sigma_{ij}^{(R)} = -\sum_{p=1}^{N_p}\left[\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_{ijmn}^{(p)}}}\right)S_{ij}^{(p)}\Big|_k\right] \qquad (۱۲)$$

مقدار $S_{ij}^{(p)}\big|_k$ به‌صورت بازگشتی با استفاده از مقادیر گره‌های زمانی قبلی و از طریق رابطهٔ (۱۳) قابل محاسبه است.

$$S_{ij}^{(p)}\Big|_k = \int_0^{t_k} E_{ijmn}^{(p)} e^{\frac{-(t_k-t')}{\rho_{ijmn}^{(p)}}}\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial t'}dt' = e^{\frac{-\Delta t}{\rho_{ijmn}^{(p)}}} S_{ij}^{(p)}\Big|_{k-1} + E_{ijmn}^{(p)}\rho_{ijmn}^{(p)}\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_{ijmn}^{(p)}}}\right)\dot{\varepsilon}_{mn}\Big|_k \qquad (۱۳)$$

که در این رابطه، $\dot{\varepsilon}_{mn}\big|_k$ نرخ تغییرات کرنش در گام زمانی قبلی است.

۳. معادلات حاکم

در حالت سه‌بعدی تقارن محوری که حالت خاصی از دستگاه مختصات استوانه‌ای است، معادلات حرکت (١٤) و (١٥) برای

تعادل دینامیکی سازه در زمان t_{k+1}، برقرارند.

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)=\rho\frac{d^2u}{dt^2} \quad (۱۴)$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}=\rho\frac{d^2w}{dt^2} \quad (۱۵)$$

که در این معادلات، σ_r، σ_θ، σ_z و τ_{rz} به‌ترتیب تنش شعاعی، تنش قائم، تنش محیطی و تنش برشی در صفحهٔ r-z هستند. همچنین ρ چگالی جرمی؛ u و w به‌ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستاهای شعاعی و قائم می‌باشند. اگر بار به‌اندازهٔ کافی آهسته وارد شود، می‌توان از جملات سمت راست معادلات صرف‌نظر کرد و مسئله به صورت شبه‌استاتیکی تبدیل خواهد شد.

برای بدست آوردن روابط تنش موجود در معادلات حرکت بر حسب جابجایی، با بکارگیری روابط کرنش جابجایی تقارن محوری مصالح همسانگرد در انتگرال بولتزمن رابطهٔ (۱)، روابط تنش-جابجایی (۱۶) تا (۱۹) بدست می‌آیند.

$$\sigma_r\big|_{k+1}=\sigma_r\big|_k+\overline{E}\left[(\alpha+2\beta)\frac{\partial(\Delta u)}{\partial r}+\frac{\alpha}{r}\Delta u+\alpha\frac{\partial(\Delta w)}{\partial z}\right]-\sum_{p=1}^{N_p}\left[\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)S_r^{(p)}\Big|_k\right] \quad (۱۶)$$

$$\sigma_\theta\big|_{k+1}=\sigma_\theta\big|_k+\overline{E}\left[\alpha\frac{\partial(\Delta u)}{\partial r}+\frac{(\alpha+2\beta)}{r}\Delta u+\alpha\frac{\partial(\Delta w)}{\partial z}\right]-\sum_{p=1}^{N_p}\left[\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)S_\theta^{(p)}\Big|_k\right] \quad (۱۷)$$

$$\sigma_z\big|_{k+1}=\sigma_z\big|_k+\overline{E}\left[\alpha\frac{\partial(\Delta u)}{\partial r}+\frac{\alpha}{r}\Delta u+(\alpha+2\beta)\frac{\partial(\Delta w)}{\partial z}\right]-\sum_{p=1}^{N_p}\left[\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)S_z^{(p)}\Big|_k\right] \quad (۱۸)$$

$$\tau_{rz}\big|_{k+1}=\tau_{rz}\big|_k+\beta\overline{E}\left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial z}+\frac{\partial(\Delta w)}{\partial r}\right]-\sum_{p=1}^{N_p}\left[\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)S_{rz}^{(p)}\Big|_k\right] \quad (۱۹)$$

که در این روابط مقادیر α و β با استفاده از ثابت‌های لامه[12]، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\alpha=\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ \beta=\frac{1}{2(1+\nu)} \quad (۲۰)$$

مقادیر $S_i^{(p)}(i=r,\theta,z,rz)$ بصورت بازگشتی با بکارگیری معلومات گره‌های زمانی قبل بصورت روابط (۲۱) تا (۲۴) قابل محاسبه‌اند.

$$S_r^{(p)}\Big|_k=e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}S_r^{(p)}\Big|_{k-1}+\frac{E_p\rho_p}{\Delta t}\left\{\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\left[(\alpha+2\beta)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_k-\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{k-1}\right)+\frac{\alpha}{r}(u_k-u_{k-1})+\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_k-\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{k-1}\right)\right]\right\} \quad (۲۱)$$

$$S_\theta^{(p)}\Big|_k=e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}S_\theta^{(p)}\Big|_{k-1}+\frac{E_p\rho_p}{\Delta t}\left\{\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_k-\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{k-1}\right)+\frac{(\alpha+2\beta)}{r}(u_k-u_{k-1})+\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_k-\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{k-1}\right)\right]\right\} \quad (۲۲)$$

$$S_z^{(p)}\Big|_k=e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}S_z^{(p)}\Big|_{k-1}+\frac{E_p\rho_p}{\Delta t}\left\{\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_k-\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{k-1}\right)+\frac{\alpha}{r}(u_k-u_{k-1})+(\alpha+2\beta)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_k-\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{k-1}\right)\right]\right\} \quad (۲۳)$$

$$S_{rz}^{(p)}\Big|_k=e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}S_{rz}^{(p)}\Big|_{k-1}+\frac{\beta E_p\rho_p}{\Delta t}\left\{\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_k-\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{k-1}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_k-\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{k-1}\right)\right]\right\} \quad (۲۴)$$

با جایگذاری روابط تنش-جابجایی (۱۶) تا (۱۹) در معادلات حرکت (۱۴) و (۱۵)، نهایتاً پس از دیفرانسیل‌گیری و ساده‌سازی، معادلات حرکت زیر بدست می‌آیند.

$$\overline{E}\left[(\alpha+2\beta)\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial r^2}+\beta\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial z^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2(\Delta w)}{\partial r\partial z}+\frac{\alpha+2\beta}{r}\frac{\partial(\Delta u)}{\partial r}-\frac{\alpha+2\beta}{r^2}\Delta u\right]=-\left[\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}\right. \quad (۲۵)$$

$$+\frac{1}{r}\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right)\Big]_k+\sum_{p=1}^{N_p}\left\{\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\left[\frac{\partial S_r^{(p)}}{\partial r}+\frac{\partial S_{rz}^{(p)}}{\partial z}+\frac{1}{r}\left(S_r^{(p)}-S_\theta^{(p)}\right)\right]_k\right\}$$

$$\bar{E}\left[\beta\frac{\partial^2(\Delta w)}{\partial r^2}+(\alpha+2\beta)\frac{\partial^2(\Delta w)}{\partial z^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial r\partial z}+\frac{\beta}{r}\frac{\partial(\Delta w)}{\partial r}-\frac{\alpha+\beta}{r}\frac{\partial(\Delta u)}{\partial z}\right]=-\left[\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}\right]_k+\sum_{p=1}^{N_p}\left[\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\left(\frac{\partial S_r^{(p)}}{\partial r}+\frac{\partial S_{rz}^{(p)}}{\partial z}+\frac{1}{r}S_{rz}^{(p)}\right)_k\right] \quad (۲۶)$$

که در این معادلات، مقادیر تنش و روابط بازگشتی و مشتقات آن‌ها، با بکارگیری معلومات گره‌های زمانی قبلی قابل محاسبه‌اند.

٤. روش دیفرانسیل کوادرچر

روش دیفرانسیل کوادرچر (DQM) با در نظر گرفتن مقادیر وزنی مناسب همانند روش مرسوم انتگرال کوادرچر، مشتق تابع را در هر نقطه به‌صورت جمع خطی تمام مقادیر تابع در راستای خط شبکه تقریب می‌زند. به‌عنوان‌مثال تابع $f(r,z)=f_{ij}$ به‌گونه‌ای که $0\le r\le a$ و $0\le z\le b$ باشد را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم مقادیر مشتقات مجهول را در نقاط موردنظر بدست آوریم. با بکارگیری DQM، مشتق مرتبهٔ اول و دوم تابع موردنظر در جهت r و z در نقطهٔ (r_i,z_j) از شبکه، بصورت روابط (۲۷) تخمین زده می‌شود [Bert and Malik, 1996].

$$\left.\frac{\partial f(r,z,t)}{\partial r}\right|_{(r_i,z_j)}=\sum_{m=1}^{N_r}A_{im}^r f_{mj}$$

$$\left.\frac{\partial f(r,z,t)}{\partial z}\right|_{(r_i,z_j)}=\sum_{n=1}^{N_z}A_{in}^z f_{in}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f(r,z,t)}{\partial r^2}\right|_{(r_i,z_j)}=\sum_{m=1}^{N_r}B_{im}^r f_{mj}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f(r,z,t)}{\partial z^2}\right|_{(r_i,z_j)}=\sum_{n=1}^{N_z}B_{in}^z f_{in} \quad (۲۷)$$

که در این روابط A_{ij}^α، B_{ij}^α $(\alpha=r,z)$ ضرایب وزنی مشتق مراتب اول و دوم و همچنین N_r و N_z تعداد نقاط شبکه در راستاهای r و z هستند.

به‌منظور لحاظ کردن صحیح ناپیوستگی مصالح یا شرایط مرزی در DQM، دامنهٔ سه‌بعدی تقارن محوری مورد بررسی Ω به چندین المان تقسیم می‌شود به صورتی که هیچ‌کدام از این المان‌ها با یکدیگر اشتراکی ندارند و در هیچ‌کدام از آن‌ها، ناپیوستگی مصالح و شرایط مرزی وجود نداشته باشد به‌طوری‌که:

$$\Omega_{(1,1)}\cap\cdots\cap\Omega_{(I,J)}\cap\cdots\cap\Omega_{(N_I,N_J)}=\varnothing$$
$$\Omega_{(1,1)}\cup\cdots\cup\Omega_{(I,J)}\cup\cdots\cup\Omega_{(N_I,N_J)}=\Omega \quad (۲۸)$$

که در این روابط N_I و N_J تعداد المان‌ها در راستاهای r و z هستند. در این پژوهش که تحلیل مصالح بر اساس مکانیک جامدات انجام می‌پذیرد، شرایط پیوستگی در مرز بین دو المان $\Omega_{(I,J)}$ و $\Omega_{(I+1,J)}$ به‌صورت روابط (۲۹) در نظر گرفته شده‌است.

$$\sigma_r(r,z,t)\big|_{(I,J)}=\sigma_r(r,z,t)\big|_{(I+1,J)},$$
$$\tau_{rz}(r,z,t)\big|_{(I,J)}=\tau_{rz}(r,z,t)\big|_{(I+1,J)},$$
$$u(r,z,t)\big|_{(I,J)}=u(r,z,t)\big|_{(I+1,J)},$$
$$w(r,z,t)\big|_{(I,J)}=w(r,z,t)\big|_{(I+1,J)} \quad (۲۹)$$

شربورن و پاندی نخستین پژوهشگرانی بودند که با تحلیل کمانش ورق ناهمسانگرد با بکارگیری DQM، دریافتند که این راه‌حل، بسیار حساس به گره‌بندی شبکه است و راه‌حل قابل اعتماد را تنها می‌توان با توزیع غیریکنواخت گره‌ها بدست آورد [Sherbourne and Pandey, 1991]. با توزیع گره‌ها با فاصلهٔ نابرابر، به علت تجمع گره‌ها بر روی نقاط مرزی، راه‌حل دیفرانسیل کوادرچر جواب‌های بسیار دقیق‌تری می‌دهد [Wang, 2015]. در روابط (۳۰) تا (۳٤)، توزیع گره‌های متفاوتی ازجمله توزیع یکنواخت (I)، توزیع به‌صورت ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف (II) و توزیع چبیشف–گاوس–لوباتو (IV) ارائه شده است. لازم بذکر است که برای سادگی، در تمام این روش‌های توزیع، دامنهٔ $-1\le r\le 1$ در نظر گرفته شده است و به‌راحتی قابل تبدیل برای بازه‌های دیگر است. همچنین پراکندگی نقاط در یک دامنهٔ یکسان در شکل ۲ نشان داده

شده‌است.

(I):

$$r_i = -1 + \frac{2(i-1)}{N_r - 1},\ \left(i = 1,\ldots,N_r\right) \qquad (۳۰)$$

(II):

$$-1, r_i = -\cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2N_r}\right], 1;\ \left(i = 2,\ldots,N_r - 1\right) \qquad (۳۱)$$

(III):

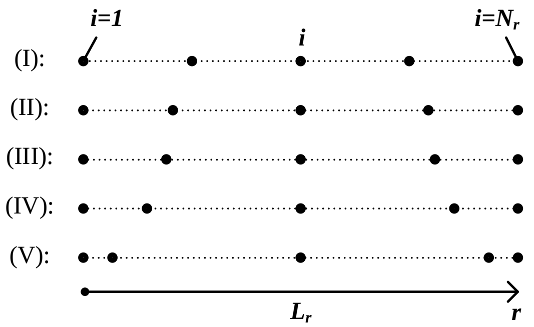
$$r_i = -\left\{\frac{\cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2N_r}\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{2N_r}\right)}\right\},\ \left(i = 1,\ldots,N_r\right) \qquad (۳۲)$$

(IV) :

$$r_i = -\cos\left[\frac{(i-1)\pi}{N_r - 1}\right], 1\ \left(i = 1,\ldots,N_r\right) \qquad (۳۳)$$

(V) :

$$-1, r_i = -\cos\left[\frac{(2i-3)\pi}{2N_r - 4}\right], 1;\ \left(i = 1,\ldots,N_r - 1\right) \qquad (۳٤)$$



شکل ۲. مقایسهٔ میزان پراکندگی گرهی در توزیع‌های مختلف.

در این پژوهش به دلیل توزیع مناسب روش چبیشف–گاوس–لوباتو به‌نحوی که در مرزها تجمع نقاط شبکه بیشتر و میزان تراکم نقاط در میان بازه، نسبتاً معقول است، از این روش جهت توزیع نقاط شبکه در تمام ابعاد مکانی استفاده شده است. به‌طورکلی با بکارگیری این روش، توزیع گرهی در راستای مختصاتی r را در بازهٔ $0 \le r \le L_r$، می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۳۵) محاسبه کرد.

$$r_i = \frac{L_r}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N_r - 1}\right)\pi\right];\ \left(i = 1,\ldots,N_r\right) \qquad (۳۵)$$

محاسبهٔ ضرایب وزنی در DQM، نخست توسط Bellman و Casti [Bellman and Casti, 1971] انجام گرفت. آنها دو روش برای تعیین ضرایب وزنی مشتق مرتبهٔ اول پیشنهاد دادند. روش اول شامل حل معادلهٔ جبری است و روش دوم از یک فرمول جبری ساده استفاده می‌کند که در آن مختصات نقاط شبکه به صورت ریشهٔ چند جمله‌ای لژاندر انتخاب شده‌اند. اغلب کاربردهای اولیهٔ DQM در مهندسی [Bellman, Kashef and Casti, 1972; Civan and Sliepcevich, 1984]، از اولین روش Bellman برای بدست آوردن ضرایب وزنی استفاده می‌کنند؛ چراکه این روش اجازه میدهد مختصات نقاط شبکه به طور دلخواه انتخاب شوند. مشکل این دو روش این است که اگر مرتبهٔ دستگاه معادلات جبری که برابر با تعداد نقاط شبکه است، بزرگ باشد، ماتریس حاصل ناموزون خواهد بود. بنابراین بسیار دشوار است که ضرایب وزنی را برای مسئله‌ای که دارای تعداد زیادی نقاط شبکه است، بدست آورد. برای غلبه بر مشکلات روش‌های بلمن در محاسبهٔ ضرایب وزنی، پژوهش‌های زیادی صورت گرفته است. Quan و Chang [Quan and Chang, 1989] با استفاده از چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژی، به عنوان تابع آزمون ، فرمول‌های صریحی را برای محاسبهٔ ضرایب وزنی مشتقات اول و دوم بدست آوردند. در این مرحله، دو سوال ممکن است بوجود بیاید. اولاً، چرا باید روش‌های مختلفی برای محاسبهٔ ضرایب وزنی وجود داشته باشد؟ و ثانیاً، چگونه می‌توان مطمئن شد که ضرایب وزنی بدست‌آمده از روش‌های مختلف یکسان هستند؟ این دو سوال را می توان به راحتی و با استفاده از تجزیه و تحلیل بردار خطی فضایی پاسخ داد. با استفاده از ویژگی‌های بردار خطی فضایی، Shu و Richards [Shu and Richards, 1990; Shu, 1991] دریافتند که تمام روش‌های محاسبهٔ ضرایب وزنی DQM، می‌توانند با انتخاب مناسب بردارهای مبدأ در فضای بردار خطی، تعمیم یابند. Shu [Shu, 1991]، یک فرمول جبری ساده را برای محاسبهٔ ضرایب وزنی مشتق مرتبهٔ اول و همچنین یک رابطهٔ تکرارشونده را برای محاسبهٔ ضرایب وزنی مشتقات مرتبهٔ دوم و بالاتر، بدون هیچ‌گونه محدودیتی در انتخاب نقاط شبکه، ارائه کرد. در این پژوهش نیز از روش عمومی [Shu and Richards, 1992] برای بدست آوردن ضرایب وزنی استفاده شده است. درآیه‌های ماتریس مربعی $\left(N_r \times N_r\right)$ ضرایب مشتق اول و دوم برای توزیع گرهی جهت مختصاتی r به‌صورت روابط (۳٦) و (۳۷) تعریف می‌شوند [Shu, 2012].

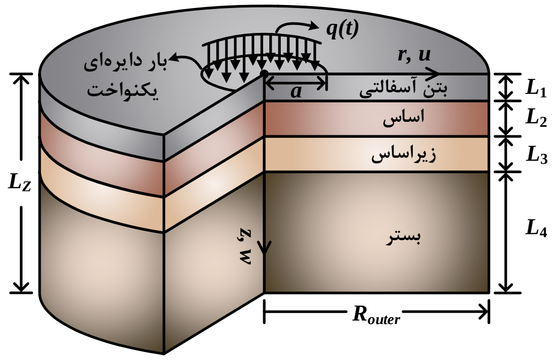
$$A_{ij}^{r}=\begin{cases}\dfrac{\prod\limits_{k=1,i\neq k}^{N_r}\left(r_i-r_k\right)}{\left(r_i-r_j\right)\prod\limits_{k=1,j\neq k}^{N_r}\left(r_j-r_k\right)} & \text{if}\quad i\neq j\\ -\sum\limits_{\substack{k=1\\ i\neq j}}^{N_r}A_{ik}^{r} & \text{if}\quad i=j\end{cases}\qquad (۳۶)$$

$$B_{ij}^{r}=\begin{cases}2\left(A_{ii}^{r}A_{ij}^{r}-\dfrac{A_{ij}^{r}}{r_i-r_j}\right) & \text{if}\quad i\neq j\\ -\sum\limits_{\substack{k=1\\ i\neq j}}^{N_r}B_{ik}^{r} & \text{if}\quad i=j\end{cases}\qquad (۳۷)$$

که در این روابط $i,j=1,2,\ldots,N_r$ است. همچنین ضرایب وزنی جهت z نیز به طریق مشابه بدست می‌آید. همانطور که در روابط بالا مشخص است، برای محاسبهٔ درآیه‌های ضرایب وزنی مشتق دوم، از درآیه‌های ماتریس ضرایب مشتق اول استفاده می‌شود.

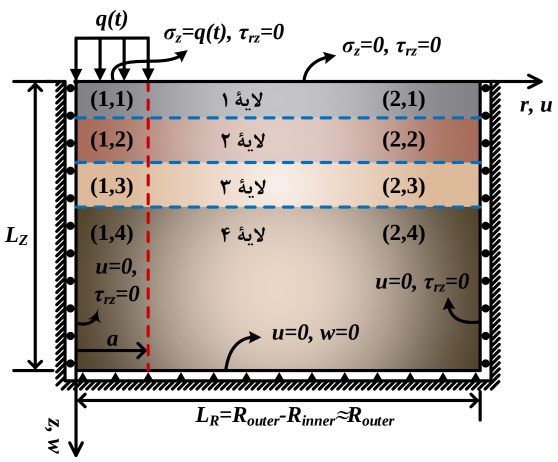
۵. مدل‌سازی و گسسته‌سازی معادلات حاکم

در این قسمت، فرم گسستهٔ معادلات حرکت و شرایط مرزی تحلیل سه‌بعدی تقارن محوری سازهٔ استوانه‌ای شکل روسازی چهارلایه با شعاع داخلی و خارجی R_{oute} و $R_{inner}=10^{-8}R_{outer}$ و ارتفاع کلی L_Z، ارائه خواهد شد. بارگذاری یکنواخت قائم در سطح $z=0$ و در ناحیهٔ دایره‌ای‌شکل به شعاع داخلی و خارجی R_{inner} و a اعمال می‌شود(شکل‌های ۳ و ٤).



شکل ۳. مدل استوانه‌ای شکل روسازی ویسکوالاستیک.

همان‌طور که مشخص است، سازه در راستای مختصاتی z، به دلیل اینکه جنس مصالح متفاوت است، به چهار زیردامنه تقسیم شده‌است. در جهت r نیز ناپیوستگی در شرایط بارگذاری وجود دارد، بنابراین در این جهت دو زیردامنه برای تحلیل DQEM ایجاد شده‌است (شکل ٤).



شکل ٤. شرایط مرزی تقارن محوری روسازی.

در ادامه، فرم گسستهٔ معادلات حرکت و شرایط مرزی تحلیل سه‌بعدی تقارن محوری این سازه که در شکل ٤ نشان داده شده، ارائه شده است. با گسسته‌سازی مشتقات به صورت مکانی با استفاده از DQM، معادلات حرکت (۲۵) و (۲٦) برای هر المان (I,J) در زمان t_{k+1} به دستگاه معادلات دیفرانسیلی روابط (۳۸) و (۳۹) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}&(\alpha+2\beta)\bar{E}\sum_{m=1}^{N_r}B_{im}^{r}(\Delta u)_{mj}\qquad (۳۸)\\&+\beta\bar{E}\sum_{n=1}^{N_z}B_{jn}^{z}(\Delta u)_{in}\\&+(\alpha+\beta)\bar{E}\sum_{m=1}^{N_r}\sum_{n=1}^{N_z}A_{im}^{r}A_{jn}^{z}(\Delta w)_{mn}\\&+\frac{(\alpha+2\beta)\bar{E}}{r_i}\sum_{m=1}^{N_r}A_{im}^{r}(\Delta u)_{mj}\\&+\frac{(\alpha+2\beta)\bar{E}}{r_i^{2}}(\Delta u)_{ij}=\rho\frac{d^{2}u_{ij}}{dt^{2}}\\&-\Bigg[\sum_{m=1}^{N_r}A_{im}^{r}(\sigma_r)_{mj}+\sum_{n=1}^{N_z}A_{jn}^{z}(\tau_{rz})_{in}\\&+\frac{1}{r_i}(\sigma_r-\sigma_\theta)_{ij}\Bigg]_k+\sum_{p=1}^{N_p}\left\{\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$\left[\sum_{m=1}^{N_r} A_{im}^{r}\left(S_r^{(p)}\right)_{mj}+\sum_{n=1}^{N_z} A_{jn}^{z}\left(S_{rz}^{(p)}\right)_{in} +\frac{1}{r_i}\left(S_r^{(p)}-S_\theta^{(p)}\right)_{ij}\right]_k\Bigg\}$$

$$\begin{aligned}&\beta\bar{E}\sum_{m=1}^{N_r} B_{im}^{r}(\Delta w)_{mj} +(\alpha+2\beta)\bar{E}\sum_{n=1}^{N_z} B_{jn}^{z}(\Delta w)_{in} +(\alpha+\beta)\bar{E}\sum_{m=1}^{N_r}\sum_{n=1}^{N_z} A_{im}^{r}A_{jn}^{z}(\Delta u)_{mn} +\frac{\beta\bar{E}}{r_i}\sum_{m=1}^{N_r} A_{im}^{r}(\Delta w)_{mj} +\frac{(\alpha+\beta)\bar{E}}{r_i}\sum_{n=1}^{N_z} A_{jn}^{z}(\Delta u)_{in}\\ &=\rho\frac{d^2 w_{ij}}{dt^2}-\left[\sum_{m=1}^{N_r} A_{im}^{r}(\tau_{rz})_{mj} +\sum_{n=1}^{N_z} A_{jn}^{z}(\sigma_z)_{in}+\frac{1}{r_i}(\tau_{rz})_{ij}\right]_k\\ &+\sum_{p=1}^{N_p}\left\{\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\left[\sum_{m=1}^{N_r} A_{im}^{r}\left(S_{rz}^{(p)}\right)_{mj} +\sum_{n=1}^{N_z} A_{jn}^{z}\left(S_z^{(p)}\right)_{in}+\frac{1}{r_i}\left(S_{rz}^{(p)}\right)_{ij}\right]_k\right\}\end{aligned} \qquad (۳۹)$$

که در این روابط $i=2,3,\dots,N_r-1$ و $j=2,3,\dots,N_z-1$ است.

فرم گسستهٔ معادلات مرزهای $r=R_{inner}$ و $r=R_{inner}$ که مربوط بـه المـان‌هـای $(1,J)$ و $(2,J)$ و برای تمـام لایـه‌هـا (J=1,2,3,4) است و در آن‌ها تنش برشی رابطهٔ (۱۹) و جابجایی شعاعی برابر صفر لحاظ می‌گردد، به صورت زیر است.

$$u(r_i,z_j,t)=u_{ij}(t)=0 \qquad (۴۰)$$

$$\beta\bar{E}\sum_{n=1}^{N_z} A_{jn}^{z}(\Delta u)_{in}+\beta\bar{E}\sum_{m=1}^{N_r} A_{im}^{r}(\Delta w)_{mj} =\left[-(\tau_{rz})_{ij}+\sum_{p=1}^{N_p}\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\left(S_{rz}^{(p)}\right)_{ij}\right]_k \qquad (۴۱)$$

کـه در روابط فوق $j=1,2,\dots,N_z$ و همچنین در المـان $(1,J)$ مقدار $i=1$ و در المان $(2,J)$ مقدار $i=N_r$ است.

فرم گســستهٔ معادلات مرز $z=0$ که مربوط به المان‌های (1,1) و (2,1) اســـت و در آن‌هـا تنش قـائم رابطـهٔ (۱۸) برابر بار قائم واردشـــده و تنش برشـــی رابطهٔ (۱۹) برابر صـــفر در نظرگرفته می‌شود، به صورت روابط (۴۲) و (۴۳) است.

$$\alpha\bar{E}\sum_{m=1}^{N_r} A_{im}^{r}(\Delta u)_{mj}+\frac{\alpha\bar{E}}{r_i}(\Delta u)_{ij} +(\alpha+2\beta)\bar{E}\sum_{n=1}^{N_z} A_{jn}^{z}(\Delta w)_{in} =\left[-(\sigma_z)_{ij}+\sum_{p=1}^{N_p}\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\left(S_z^{(p)}\right)_{ij}\right]_k -q(t)H(a-r_i) \qquad (۴۲)$$

$$\beta\bar{E}\sum_{n=1}^{N_z} A_{jn}^{z}(\Delta u)_{in}+\beta\bar{E}\sum_{m=1}^{N_r} A_{im}^{r}(\Delta w)_{mj} =\left[-(\tau_{rz})_{ij}+\sum_{p=1}^{N_p}\left(1-e^{\frac{-\Delta t}{\rho_p}}\right)\left(S_{rz}^{(p)}\right)_{ij}\right]_k \qquad (۴۳)$$

که در این روابط $i=2,3,\dots,N_r-1$ و $j=1$ است.

فرم گسستهٔ معادلات مرز افقی $z=L_Z$ که مربوط به المان‌های (1,4) و (2,4) اســـت و در آن‌ها جابجایی در دو جهت r و z صفر است (u=w=0) به صورت روابط (۴۴) و (۴۵) است.

$$u_{ij}(t)=0 \qquad (۴۴)$$

$$w_{ij}(t)=0 \qquad (۴۵)$$

که در این روابط $i=2,3,\dots,N_r-1$ و $j=N_z$ است.

در هر مسئله، تعداد $2\times\sum_{I=1}^{N_I} N_{r,I}\times\sum_{J=1}^{N_J} N_{z,J}$ معادله و مجهول در هر گام زمانی تشـکیل می شـود که می‌توان آن را به فرم ماتریسی زیر بیان کرد.

$$[K]\{\Delta U\}_{k+1}=\{q(t)\}_{k+1}+\{F_v(t)\}_k \qquad (۴۶)$$

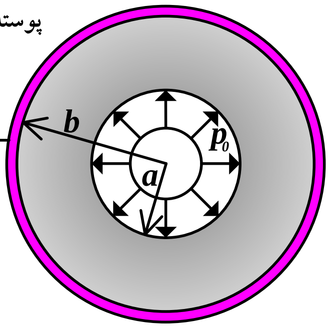
کـه در این رابطـه، $[K]$، $\{\Delta U\}_{k+1}$ و $\{q(t)\}_{k+1}$ بـه ترتیـب نمایندهٔ ماتریس مربعی ســـختی کل، ماتریس ســـتونی درجات آزادی افزایشـی و ماتریس سـتونی بار خارجی مسـئله می‌باشند. همچنین ماتریس ستونی $\{F_v(t)\}_k$، مربوط به بار خارجی ناشی از میرایی داخلی ویسـکوالاسـتیک اسـت. بر اساس فرمولاسیون ارائه‌شـده، برنامهٔ کامپیوتری در محیط نرم‌افزار MATLAB تهیه شـده اسـت و معادلهٔ (۴۶) با استفاده از آن حل‌شده و مؤلفه‌های تنش، کرنش و جابجایی در هر گام زمانی بدست می‌آید.

٦. صحت‌سنجی

به منظور درستی‌سنجی کد نوشته شده به وسیلهٔ زبان برنامه‌نویسی MATLAB، توانایی کد برای پیش بینی دقیق رفتار دو مسئلهٔ سه‌بعدی تقارن محوری با فرض رفتارهای خطی الاستیک یا ویسکوالاستیک و بارگذاری‌های مکانیکی متفاوت، که برای آن راه‌حل تحلیلی ارائه شده و حل اجزاء محدود انجام گرفته است، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

١،٦. تحلیل سیلندر ویسکوالاستیک محصور تحت فشار داخلی

به منظور صحت‌سنجی فرمولاسیون ویسکوالاستیک، یک سیلندر ویسکوالاستیک طویل با دیواره‌ای ضخیم که در پوسته‌ای با سختی بی نهایت قراردارد، در نظر گرفته شده که در معرض فشار داخلی p_0 قرار دارد (شکل ٥).



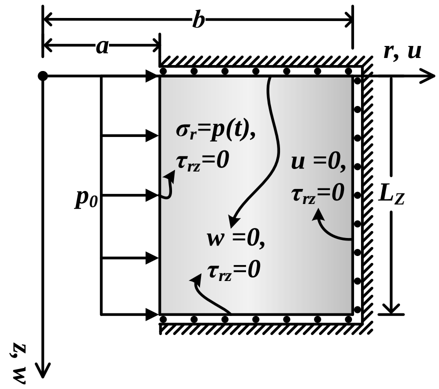
شکل ٥. سیلندر ویسکوالاستیک تحت فشار داخلی p_0.

این هندسه، نمایانگر یک موتور موشک با سوخت جامد است که سیلندر ویسکوالاستیک، سوخت را نشان می‌دهد و پوستهٔ سخت نشان دهندهٔ پوشش موتور موشک است. برای مدل‌سازی مصالح مورد استفاده در این مسئله، از یک مدل ماکسول-ویچرت دارای یک المان ماکسول با مدول وادادگی $E(t)=E_\infty+E_1e^{-t/\rho_1}$ استفاده شده است که در آن $E_\infty=0.1\,\mathrm{MPa}$، $E_1=0.4\,\mathrm{MPa}$ و $\rho_1=1\mathrm{s}$ است و ضریب پواسون برابر 0.3 در نظر گرفته شده است.

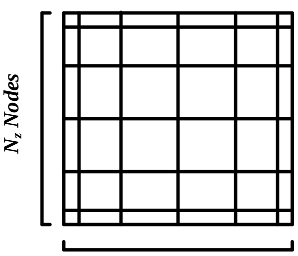
با بکارگیری راه حل الاستیسیته همراه با اصل تطابق ویسکولاستیک، راه حل تحلیلی (٤٧) برای جابجایی شعاعی بدست می‌آید [Zocher, Groves and Allen, 1997].

$$u(r,t)=\frac{p_0a^2b(1+\nu)(1-2\nu)}{a^2+(1-2\nu)b^2}\left(\frac{b}{r}-\frac{r}{b}\right)D(t) \qquad (٤٧)$$

که در این رابطه $D(t)=D_0+D_1\left(1-e^{-t/\lambda_1}\right)$ انطباق خزش است که در آن $D_0=2\,\mathrm{MPa}^{-1}$، $D_1=8\,\mathrm{MPa}^{-1}$ و $\lambda_1=5\,\mathrm{s}$ است. مقادیر D_0 و D_1 بوسیلهٔ برنامهٔ کامپیوتری تهیه‌شده در این پژوهش بر اساس روش تبدیل مدول وادادگی به انطباق خزش با بکارگیری تبدیل لاپلاس و استفاده از مرجع [Park and Schapery, 1999] بدست آمده است. به‌منظور مدل‌سازی عددی این مسئله، مقادیر $a=2\ \mathrm{m}$، $b=4\ \mathrm{m}$ و $p_0=100\ \mathrm{Pa}$ در نظر گرفته شده‌اند. این مسئله با استفاده از DQM و در نظر گرفتن شرایط مرزی شکل ٦ و شبکه‌بندی شکل ٧ تحلیل شده است. در تحلیل DQM، به دلیل اینکه کل سیلندر مدل‌سازی نشده باشد، شرایط سه‌بعدی تقارن محوری بکارگرفته شده است.



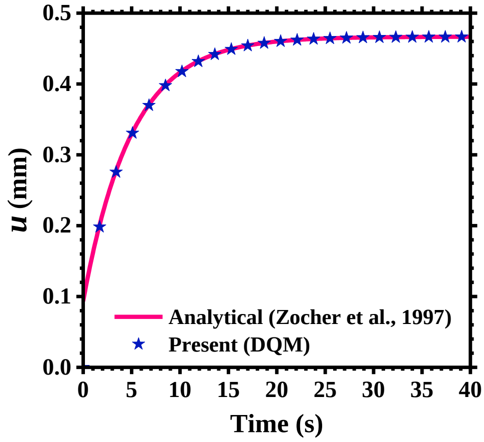
شکل ٦. شرایط مرزی سیلندر ویسکوالاستیک تحت فشار داخلی



شکل ٧. شبکه‌بندی DQM سیلندر ویسکوالاستیک

نتایج حل تحلیلی و پاسخ DQM برای جابجایی شعاعی r=3 m و همگرایی آن در لحظهٔ t=40 s در در شکل ٨ و جدول ١

ارائه شــده اســت. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، نتایج راه حل تحلیلی و DQM بسیار نزدیک به یکدیگر هستند.



شکل ۸. صحت‌سنجی جابجایی شعاعی (r=3 m) سیلندر ویسکوالاستیک تحت فشار داخلی.

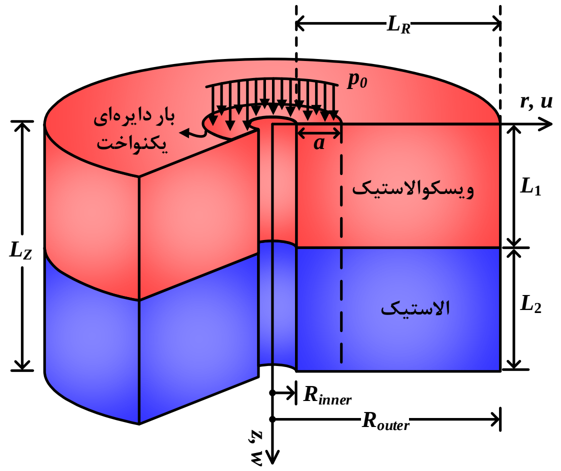
جدول ۱. بررسی روند همگرایی جابجایی شعاعی (r=3 m) سیلندر ویسکوالاستیک در لحظهٔ t=40 s.

Solution	u (μm)	% Error
Analytic	466.541	-
DQM	590.749	26.62
	470.115	0.76
	466.681	0.03
	466.545	8.57e-04
	466.540	-2.14e-04
	466.540	-2.14e-04

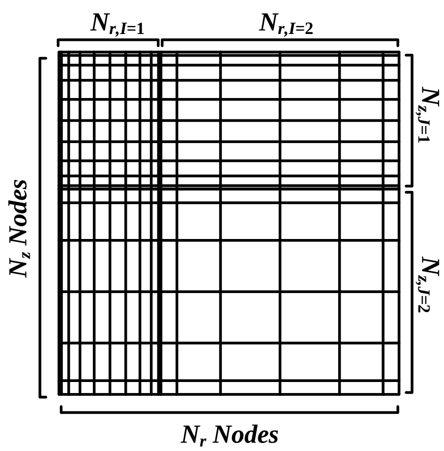
۲,۶. تحلیل سیلندر ویسکوالاستیک محصور دولایه تحت فشار محوری

در این مثال، سیلندری با دو لایهٔ ویسکوالاستیک و الاستیک و با شعاع داخلی $R_{inner} = 0.5\,\mathrm{m}$، شعاع خارجی $R_{outer} = 1.5\,\mathrm{m}$ و ارتفاع $L_Z = 1\mathrm{m}$ در نظر گرفته‌شده که در مرز $z = 0$ تحت فشــار قائم $p_0 = 100\,\mathrm{Pa}$ تا شــعاع $r = 0.8\,\mathrm{m}$ ($a = 0.3\,\mathrm{m}$) قرار گرفته است (شکل ۹).

این مســئله با بکارگیری DQEM (شــکل ۱۰) و روش اجزاء محــدود (نرم افزار آبــاکوس) مــدلســـازی و همچنین به‌منظور شــبیه‌ســازی رفتار ویســکوالاســتیک، از داده‌های تجربی مخلوط آســفالتی، که در مراجع [Lee, 1996] ارائه شــده، اســتفاده شده اســـت و بتن‌هـای آســـفـالتی AAD یـا AAM که از مخلوط خرده‌ســـنگ‌های گرانیت واتســـونویل[۱۳] و قیرهای AAD-1 یا AAM-1 در اســـتاندارد رده‌بندی SHRP [۱۴] با نســـبت وزنی ۵ درصـد مجموع جرم مخلوط، ســاخته شـده‌اند، به عنوان مصالح لایهٔ بتن آسـفالتی در نظر گرفته می‌شـوند. سـری پرونی–دریکله این مصــالح برای دمای ۲۵ درجهٔ ســانتی‌گراد در جدول ۲ ارائه شــده اســت. این دو سـری پرونی بر اسـاس مدل‌های ماکسول–ویچرت تعمیم یافته که از ترکیب ۱۱ المان موازی ماکســـول و یک فنر ایزوله ســاخته شــده‌اند، بدســت آمده اســت و همچنین پارامترهای E_p و ρ_p، که پیشتر معرفی شدند، مدول وادادگی و زمان وادادگی هر المان ماکســـول و پارامتر E_∞ مدول تعادل اســت. پارامترهای تحلیل DQEM و مشخصات مکانیکی لایه‌ها در جدول ۳ ذکر شده‌اند.



شکل ۹. مدل استوانه‌ای‌شکل سیلندر دولایه.



شکل ۱۰. شبکه‌بندی DQEM مدل سیلندر دولایه.

جدول ۲. مشخصات سری پرونی مصالح AAD و AAM [Lee, 1996; de Araújo, Soares, de Holanda et al., 2010].

	AAD		AAM	
p	E_p (MPa)	ρ_p (s)	E_p (MPa)	ρ_p (s)
∞	1.106	-	1.172	-
1	5870	1.2×10^{-5}	3100	2.2×10^{-5}
2	3640	1.2×10^{-4}	4310	2.2×10^{-4}
3	3340	1.2×10^{-3}	3460	2.2×10^{-3}
4	1940	1.2×10^{-2}	2020	2.2×10^{-2}
5	539	1.2×10^{-1}	1270	2.2×10^{-1}
6	72.7	1.2×10^{0}	272	2.2×10^{0}
7	19.9	$1.2\times10^{+1}$	65.9	$2.2\times10^{+1}$
8	3.65	$1.2\times10^{+2}$	14.5	$2.2\times10^{+2}$
9	1.43	$1.2\times10^{+3}$	1.52	$2.2\times10^{+3}$
10	0.699	$1.2\times10^{+4}$	0.71	$2.2\times10^{+4}$
11	0.290	$1.2\times10^{+5}$	0.0588	$2.2\times10^{+5}$

جدول ۳. پارامترهای تحلیل سیلندر دولایه.

لایه	پارامترها
ویسکوالاستیک	$L_1 = 0.4\text{m},\ N_z = 11,\ (E,\rho) =$ جدول ۲
الاستیک	$L_2 = 0.6\text{m},\ N_z = 17,\ E = 40\ \text{MPa}$
پارامترهای دیگر:	$N_{r,I=1} = 7,\ N_{r,I=2} = 7,\ \nu = 0.3$

همچنین در مدل‌سازی آباکوس از المان چهارگرهی CAX4R استفاده شده و تعداد ۳۹۲ درجه آزادی در نظر گرفته شده است. نتایج آباکوس و DQEM برای جابجایی قائم در $z = 0$ و تنش افقی و تنش قائم در مرز دولایه در شکل ۱۱ ارائه شده است. لازم به ذکر است که مدت زمان تحلیل این مسئله در نرم‌افزار آباکوس با ۴۰۰ گام زمانی برابر ٦١ ثانیه است درحالی‌که این مقدار در روش دیفرانسیل کوادرچر برابر ۸ ثانیه است. همان‌طور که در شکل ۱۱(الف) تا (ج) ملاحظه می‌گردد، نتایج DQEM اعم از جابجایی و تنش شعاعی و قائم به نتایج آباکوس بسیار نزدیک است. در شکل ۱۱(ب) مشاهده می‌شود که با گذشت زمان، اختلاف بین تنش شعاعی بالا و پایین در مرز بین دو لایه کمتر می‌شود و در بتن آسفالتی AAD این اتفاق سریع‌تر رخ می‌دهد. شکل ۱۲، مقایسهٔ تنش شعاعی بدست‌آمده از DQEM و آباکوس را در $r = 0$ و پس از گذشت ۱۰ ثانیه از شروع بارگذاری نشان می‌دهد و همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، مقدار تنش شعاعی در لایهٔ ویسکوالاستیک برای بتن AAM مثبت اما در بتن AAD این مقدار منفی است و این به دلیل خصوصیات رفتاری دو ماده می‌تواند باشد.

۷. تحلیل شبه‌استاتیکی روسازی ویسکوالاستیک تحت بار سینوسی

در این مثال، یک سازهٔ روسازی چهار لایه متشکل از لایه‌های بتن آسفالتی، اساس، زیراساس و بستر، به صورت یک مدل استوانه ای‌شکل فرض می‌گردد که در مرکز سطح فوقانی آن تحت بار یکنواخت زمانمند $q(t)$ تا شعاع $a = 0.15\ \text{m}$ قرار گرفته و شعاع خارجی و داخلی استوانه برابر $R_{outer} = 20\text{a}$ و $R_{inner} = 10^{-8} R_{outer}$ و ارتفاع کلی سازهٔ روسازی برابر $L_Z = 50\text{a}$ در نظر گرفته شده است. رابطهٔ بار زمانمند یکنواخت اعمال شده در شعاع a، به صورت رابطهٔ (٤٨) است.

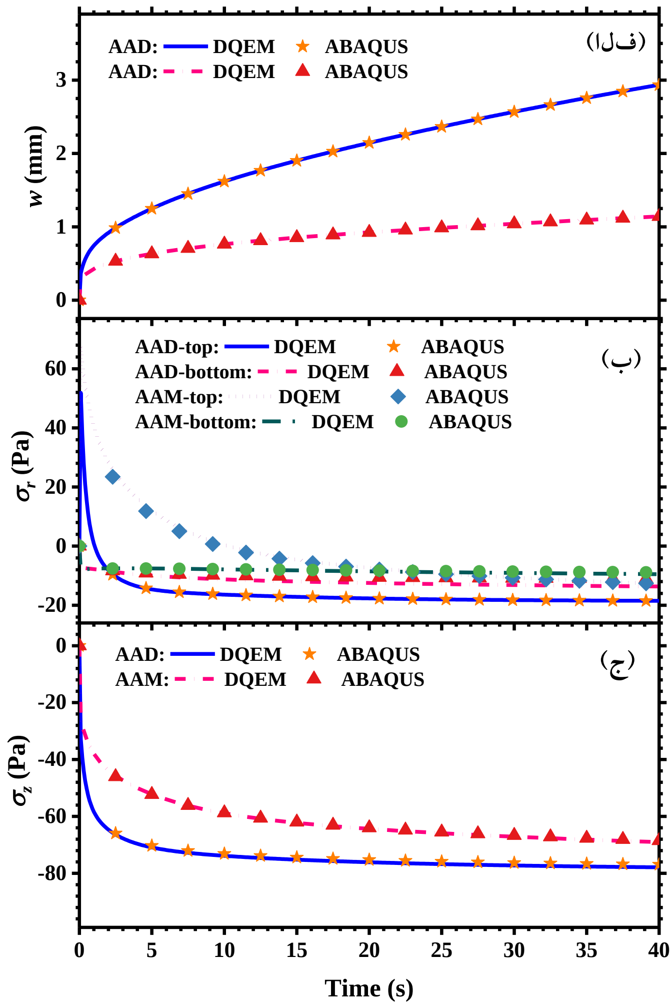
$$q(t) = q_0 \sin^2\left(\frac{t}{t_1}\pi\right) H(t_1 - t) \qquad (٤٨)$$

که در این رابطه، $q_0 = 550\ \text{kPa}$ و t_1 برابر مدت زمان اعمال بار است که مقدار آن برای سرعت‌های ۸، ٦٠، ۱۰۰ و ۱۳۰ km/h به ترتیب معادل ۰/۱، ۰/۰۱۳، ۰/۰۰۸ و ۰/۰۰٦ ثانیه در نظر گرفته شده است. نمودار بارگذاری نسبت به زمان نرمال شده در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

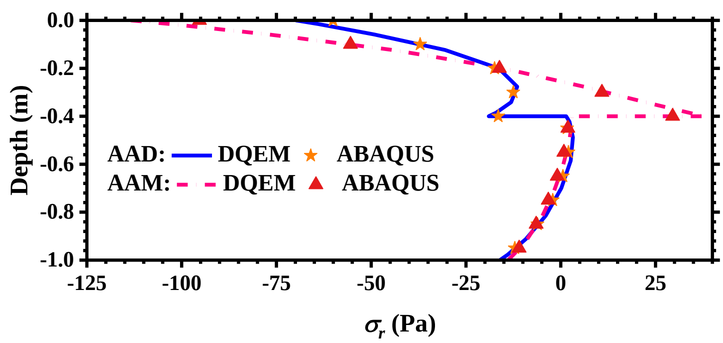
هندسهٔ استوانه‌ای‌شکل روسازی و شرایط مرزی تحلیل سه‌بعدی تقارن محوری آن، پیش‌تر در شکل ۳ و شکل ٤ ارائه شده‌اند. مشخصات مصالح و ضخامت لایه‌ها، جزئیات شرایط مرزی و پارامترهای تحلیل مسائل با بکارگیری DQEM و شبکه‌بندی مدل به ترتیب در جدول ٤ و شکل ١٤ ارائه شده اند.

جدول ٤. پارامترها و مشخصات لایه‌های روسازی چهارلایه.

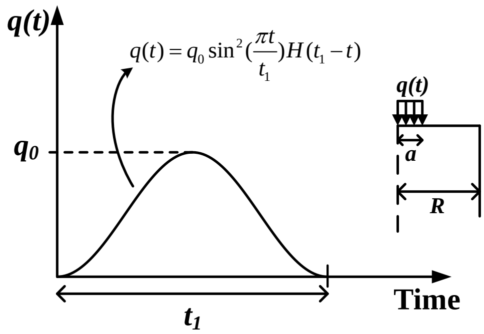
لایه	E (MPa)	L_i (m)	ν	ρ (kg/m^3)
1	ویسکوالاستیک، جدول ۲	0.15	0.35	2300
2	500	0.2	0.35	2100
3	200	0.2	0.35	190
4	100	6.95	0.35	1700
پارامترهای دیگر: $L_Z = 7.5\,\text{m},\ L_R = 2.1\,\text{m},\ a = 0.15\ \text{m}.$				



شکل ۱۱. صحت‌سنجی نتایج تحلیل سیلندر دولایه؛ (الف) جابجایی قائم در (r,z)=[0.5,0]، (ب) تنش شعاعی در (r,z)=[0.8,0.4] و (ج) تنش قائم در (r,z)=[0.5,0.4].

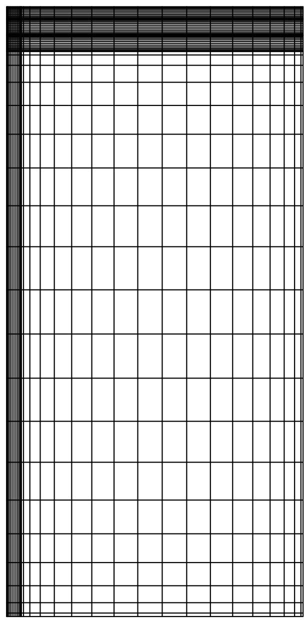


شکل ۱۲. صحت‌سنجی پاسخ تنش شعاعی در شعاع r=0 و t=10 s.



شکل ۱۳. نمودار بار زمانمند اعمال شده به روسازی.

لازم به ذکر اســـت که در این مثال از $N_r = 32$ گره در جهت شعاعی، $N_z = 64$ گره در جهت قائم و ۱۰۱ گره زمانی استفاده شـــده اســـت. همچنین دامنهٔ زمانی کل تحلیل برابر $2t_1$ در نظر گرفته شده است.



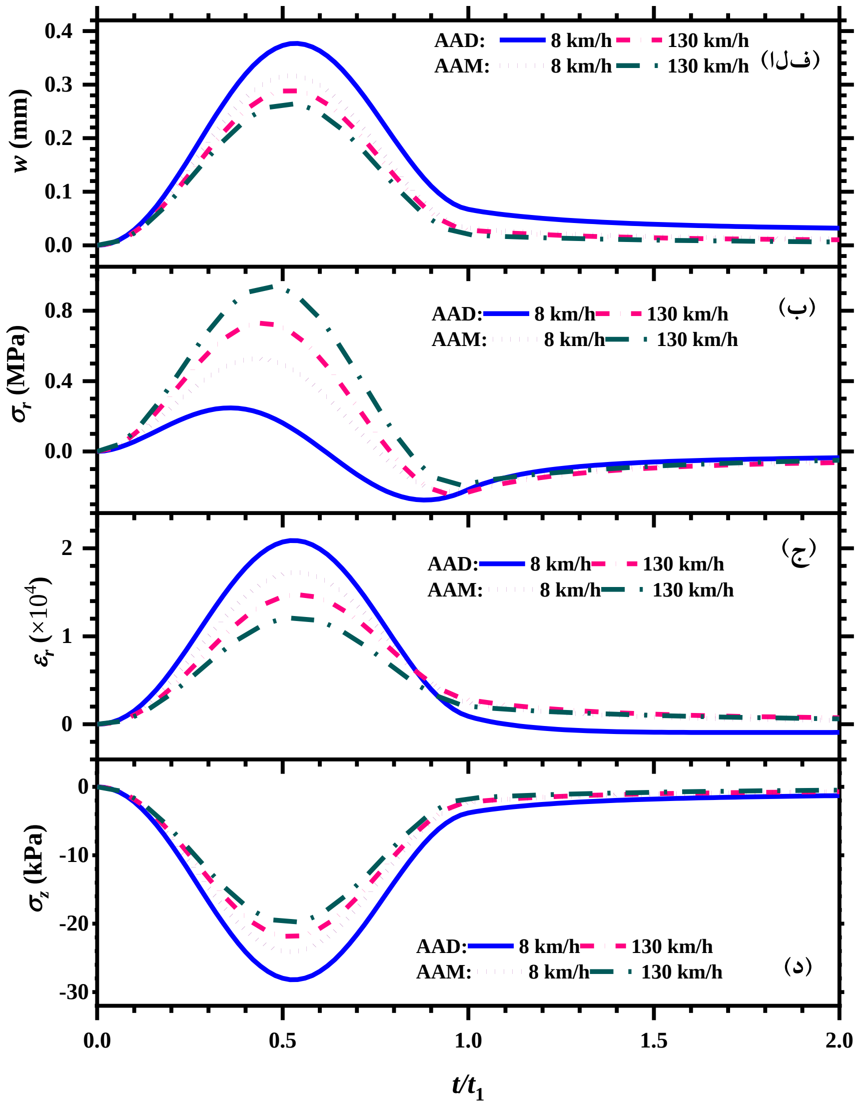
شکل ١٤. شبکه‌بندی مدل DQM روسازی چهارلایه.

شـکل ۱۵ نمودارهای پاسـخ شبه‌استاتیکی حداکثر جابجایی قائم سـطح رویهٔ آسـفالتی، تنش و کرنش شعاعی زیرِ لایهٔ آسفالتی و همچنین تنش قـائم روی بســـتر، تحت ســـرعت‌های ۸ و ۱۳۰ km/h و در نظر گرفتن دو نوع بتن آســـفالتی AAD و AAM، برحســب زمان نرمال شــده، نشـان داده شده است. همان‌طور که مشــخص اســت، با افزایش ســرعت بارگذاری، جابجایی قائم و تنش شــعاعی کاهش اما کرنش قائم و تنش روی بســتر اغزایش می‌یابند.

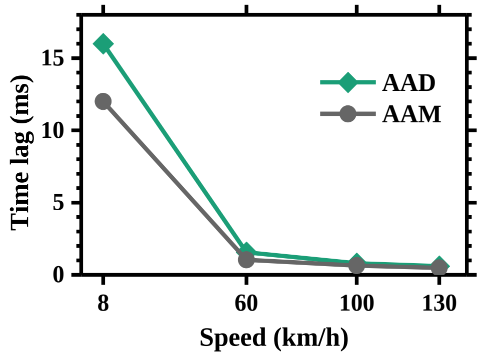
یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مصـــالح ویســکوالاســتیک، تأخیر زمانی[15] بین تنش و کرنش اســـت. این ویژگی در شـــکل ١٦ و شـــکل ۱۷ برای ســـرعت‌های مختلف بارگذاری و دو نوع بتن آسفالتی AAD و AAM نشان داده‌شده است.

در شـــکـل ۱۷ تغییرات تنش و کرنش در برابر زمـان برای هر سـرعت، به‌طور هم‌زمان در یک شـکل نشـان داده شـده اسـت. همان‌طور که ملاحظه می‌شـــود با افزایش ســـرعت، این اختلاف زمانی بین تنش و کرنش شعاعی کاهش می‌یابد.

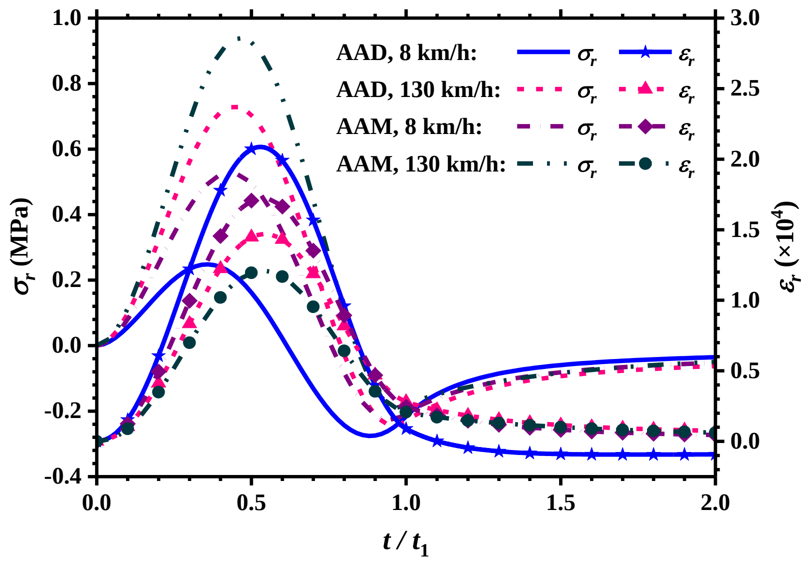
شـکل ۱۸، حداکثر پاسخ‌های شبه استاتیکی ($t = t_1 / 2$) تحت سـرعت‌های بارگذاری ۸ و ۱۳۰ km/h را در امتداد محور تقارن و برای دو نوع بتن آســـفالتی AAD و AAM، نســـبت به عمق نشـــان داده شـــده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شـــود با افزایش سـرعت، کرنش شـعاعی و کرنش قائم، کاهش می‌یابند اما تنش قـائم و تنش شـــعاعی افزایش می‌یابند. کانتور توزیع جابجایی، تنش و کرنش حداکثر روسـازی ویسـکوالاستیک با بتن آسفالتی AAM برای سـرعت ۸ km/h در شـکل ۱۹ تا شـکل ۲۲ ارائه شده‌اند.



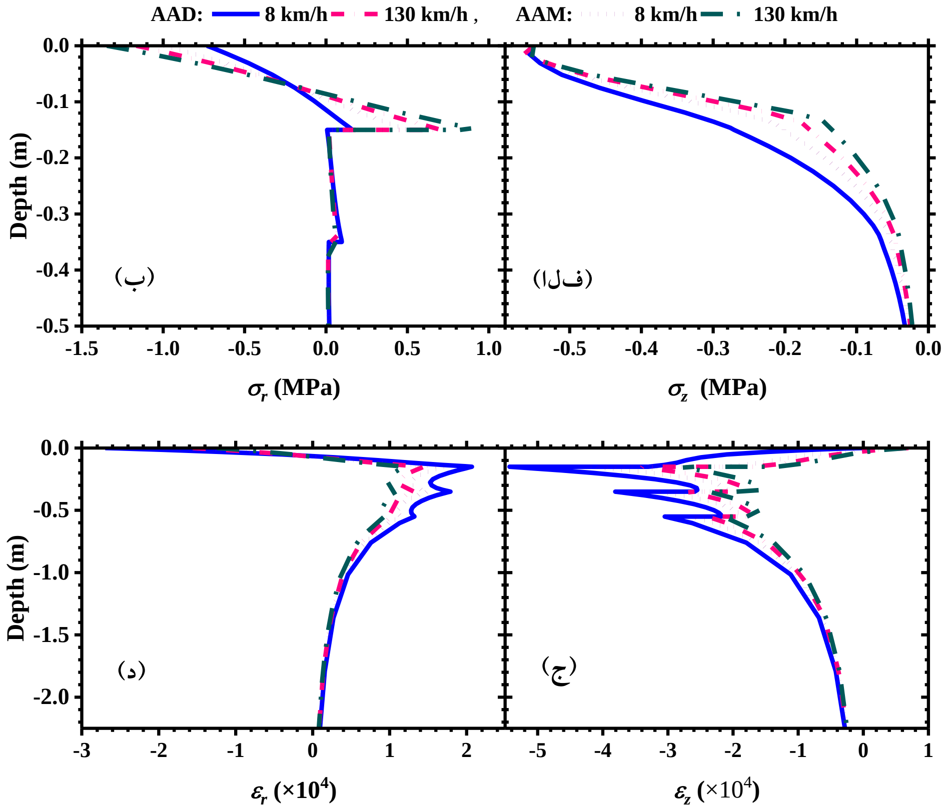
شکل ۱۵. پاسخ شبه‌استاتیکی روسازی ویسکوالاستیک (بتن آسفالتی AAD و AAM) تحت پالس بار با سرعت ۸ و ۱۳۰ km/h برحسب زمان نرمال‌شده: (الف) جابجایی قائم بر روی لایهٔ آسفالتی در مختصات (r,z)=(0,0)، (ب) و (ج) تنش و کرنش شعاعی زیرِ لایهٔ آسفالتی در مختصات (r,z)=(0,0.15)، (د) تنش قائم روی لایهٔ بستر در مختصات (r,z)=(0,0.55).



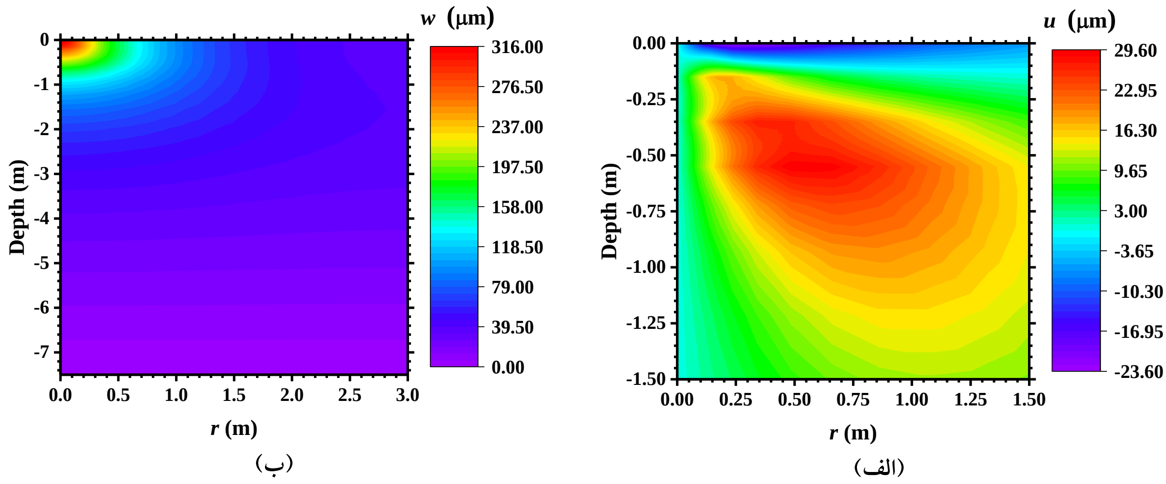
شکل ۱٦. تأخیر زمانی بین حداکثر پاسخ شبه‌استاتیکی تنش و کرنش شعاعی زیرِ لایهٔ آسفالتی (بتن آسفالتی AAD و AAM) برحسب سرعت.



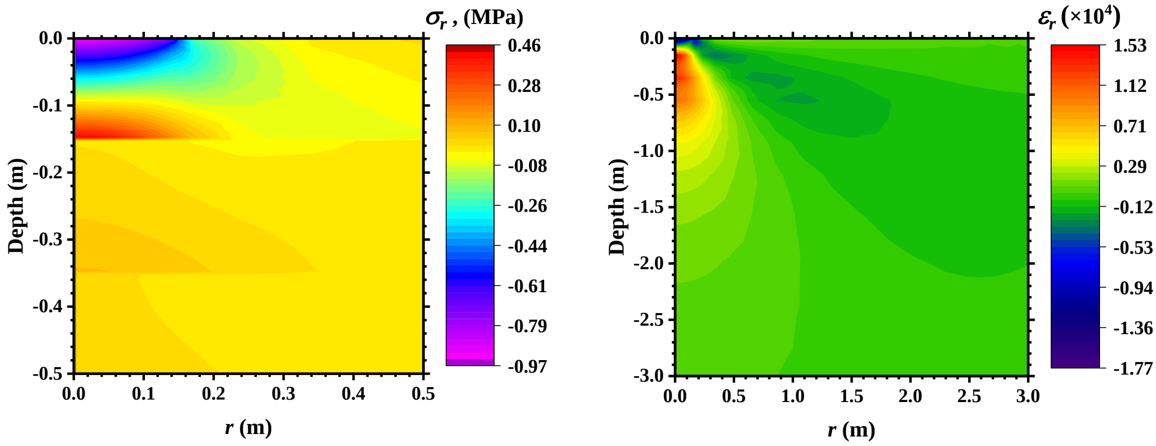
شکل ۱۷. تأخیر زمانی بین حداکثر پاسخ شبه‌استاتیکی تنش و کرنش شعاعی زیرِ لایهٔ آسفالتی روسازی ویسکوالاستیک (بتن آسفالتی AAD و AAM) تحت پالس بار با سرعت ۸ و ۱۳۰ km/h برحسب زمان نرمال‌شده.



شکل ۱۸. پاسخ شبه‌استاتیکی در امتداد محور تقارن روسازی ویسکوالاستیک (بتن آسفالتی AAD و AAM) تحت پالس بار با سرعت ۸ و ۱۳۰ km/h برحسب عمق: (الف) تنش قائم، (ب) تنش شعاعی، (ج) کرنش قائم، (د) کرنش شعاعی.

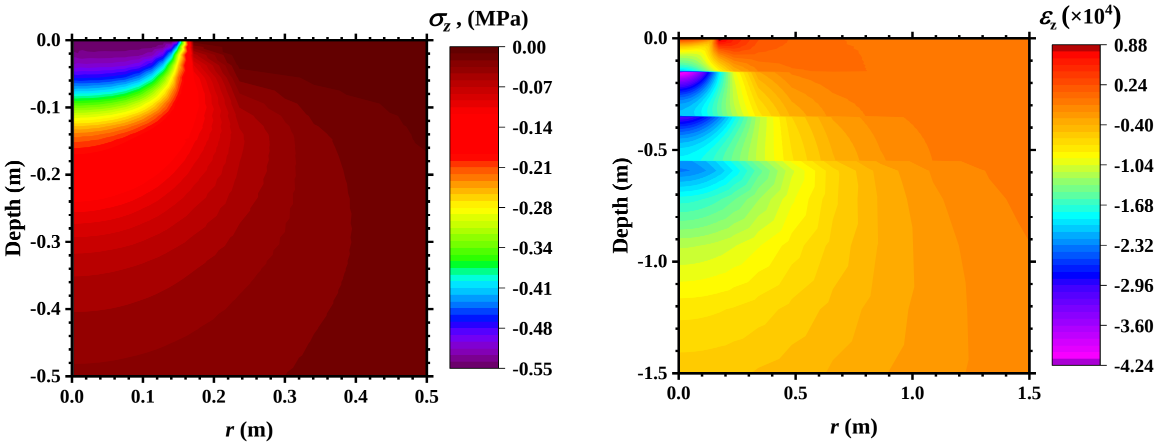


شکل ۱۹. کانتور توزیع حداکثر پاسخ در تحلیل شبه‌استاتیکی روسازی ویسکوالاستیک با بتن AAM تحت پالس بار با سرعت ۸ km/h:
(الف) جابجایی شعاعی، (ب) جابجایی قائم،



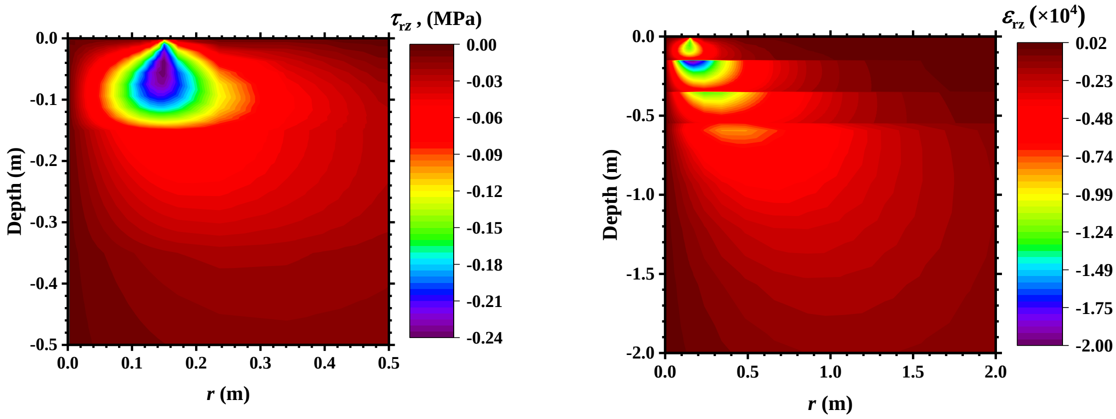
(ب) (الف)

شکل ۲۰. کانتور توزیع حداکثر پاسخ در تحلیل شبه‌استاتیکی روسازی ویسکوالاستیک با بتن AAM تحت پالس بار با سرعت ۸ km/h:
(الف) کرنش شعاعی، (ب) تنش شعاعی.



(ب) (الف)

شکل ۲۱. کانتور توزیع حداکثر پاسخ در تحلیل شبه‌استاتیکی روسازی ویسکوالاستیک با بتن AAM تحت پالس بار با سرعت ۸ km/h:
(الف) کرنش قائم، (ب) تنش قائم.



(ب) (الف)

شکل ۲۲. کانتور توزیع حداکثر پاسخ در تحلیل شبه‌استاتیکی روسازی ویسکوالاستیک با بتن AAM تحت پالس بار با سرعت ۸ km/h:
(الف) کرنش برشی، (ب) تنش برشی.

۸. نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک برنامهٔ جامع سه‌بعدی تقارن محوری به منظور تحلیل ویسکوالاستیک خطی مصالح همگن و همسانگرد در محیط نرم‌افزار برنامه‌نویسی MATLAB توسعه یافته است و برای اولین بار از روش المان دیفرانسیل کوادرچر (DQEM) برای تحلیل شبه‌استاتیکی سازهٔ روسازی لایه‌ای انعطاف‌پذیر با رفتار ویسکوالاستیک استفاده شده است. به منظور مدل کردن رفتار ویسکوالاستیک خطی، یک روش افزایشی بر پایهٔ اصل تطابق بولتزمن و مدل رفتاری ماکسول-ویچِرت تعمیم‌یافته، بکارگرفته شده است .

با استفاده از این برنامه می‌توان پیش‌بینی هایی از قبیل خزش، وادادگی و خزش-بازیابی را پیش بینی کرد. از این برنامه می‌توان برای پیش‌بینی بلندمدت پاسخ روسازی و یا هرسازهٔ تقارن محور چند لایه با رفتار ویسکوالاستیک خطی استفاده کرد.

همگرایی سریع، دقت بالا و هزینه محاسباتی کم، از مزایای این روش عددی می باشد که با مقایسهٔ نتایج حاصل از کد با نتایج حل تحلیلی و نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس، نشان داده شد.

با استفاده از کد تهیه شده با این روش، یک روسازی لایه‌ای با رفتار ویسکوالاستیک، تحت بارگذاری زمان‌مند با دو سرعت پایین(۸ کیلومتر بر ساعت) و سرعت بالا(۱۳۰ کیلومتر بر ساعت) برای دو نوع مخلوط بتن آسفالتی AAM و AAD تحلیل گردید و پاسخ تنش، کرنش و تغییر مکان آن‌ها با یکدیگر مقایسه شدند و کانتور پاسخ برای سرعت پایین با استفاده از کد توسعه یافته ترسیم گردید.

۹. پی‌نوشتها

[1] Flexible pavement
[2] Layered elastic theory
[3] Asphalt concrete
[4] Generalized maxwel-wiechert model
[5] Generalized kelvin-voigt model
[6] Sigmoidal model
[7] Laplace or Fourier transforms
[8] Prony series
[9] Differential quadrature method
[10] fourth-order tensor of relaxation modulus
[11] Tangent Young modulus
[12] Lame’s constant
[13] Watsonville granite aggregates
[14] Strategic highway research program
[15] Time Lag

۱۰. مراجع

-Ahlborn, G. (1972) "ELSYM5, computer program for determining stresses and deformations in five layer elastic system". University of California, Berkeley.

-Al-Qadi, I., Wang, H. and Tutumluer, E. (2010) "Dynamic analysis of thin asphalt pavements by using cross-anisotropic stress-dependent properties for granular layer", Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, No. 2154, pp. 156-163.

-Ameri, M., Malakouti, M. and Malekzadeh, P. (2014) "Quasi-static analysis of multilayered domains with viscoelastic layer using incremental-layerwise finite element method", Mechanics of Time-Dependent Materials, Vol. 18, No. 1, pp. 275-291.

-Bellman, R. and Casti, J. (1971) "Differential quadrature and long-term integration", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 34, No. 2, pp. 235-238.

-Bellman, R., Kashef, B. and Casti, J. (1972) "Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations", Journal of Computational Physics, Vol. 10, No. 1, pp. 40-52.

-Bert, C. W. and Malik, M. (1996) "Differential quadrature method in computational mechanics: a review", Applied Mechanics Review, Vol. 49, No. 1, pp. 1-28.

-Boltzmann, L. (1878) "Zur theorie der elastischen nachwirkung", Annalen der Physik, Vol. 241, No. 11, pp. 430-432.

-Chabot, A., Chupin, O., Deloffre, L. and Duhamel, D. (2010) "Viscoroute 2.0 a: tool for the simulation of moving load effects on asphalt pavement", Road Materials and Pavement Design, Vol. 11, No. 2, pp. 227-250.

-Chazal, C. and Pitti, R. M. (2012) "Incremental viscoelastic formulation using generalized variables for thin structures: relaxation differential approach", Acta Mechanica, pp. 1-10.

-Keshavarz, A., Malekzadeh, P. and Hosseini, A. (2016) "Time domain dynamic analysis of floating piles under impact loads", International Journal of Geomechanics, pp. 04016051.

-Khavassefat, P., Jelagin, D. and Birgisson, B. (2012) "A computational framework for viscoelastic analysis of flexible pavements under moving loads", Materials and structures, Vol. 45, No. 11, pp. 1655-1671.

-Kim, J. (2011) "General viscoelastic solutions for multilayered systems subjected to static and moving loads", Journal of Materials in Civil Engineering, Vol. 23, No. 7, pp. 1007-1016.

-Lee, H.-J. (1996) "Uniaxial constitutive modeling of asphalt concrete using viscoelasticity and continuum damage theory", Carolina: North Carolina State University.

-Liu, P., Wang, D. and Oeser, M. (2015) "Application of semi-analytical finite element method coupled with infinite element for analysis of asphalt pavement structural response", Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition), Vol. 2, No. 1, pp. 48-58.

-Malakouti, M., Ameri, M. and Malekzadeh, P. (2014a). "Dynamic viscoelastic incremental-layerwise finite element method for multilayered structure analysis based on the relaxation approach", Journal of Mechanics, Vol. 30, No. 06, pp. 593-602.

-Malakouti, M., Ameri, M. and Malekzadeh, P. (2014b) "Incremental layerwise finite element formulation for viscoelastic response of multilayered pavements", International Journal of Transportation Engineering, Vol. 1, No. 3, pp. 183-198.

-Malekzadeh, P. (2011) "Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded arbitrary straight-sided quadrilateral plates using differential quadrature method", Composite Structures, Vol. 93, No. 4, pp. 1246-1254.

-Malekzadeh, P. and Heydarpour, Y. (2015) "Mixed Navier-layerwise differential quadrature three-dimensional static and free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube

-Chen, E. Y., Pan, E. and Green, R. (2009) "Surface loading of a multilayered viscoelastic pavement: Semianalytical solution", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 135, No. 6, pp. 517-528.

-Civan, F. and Sliepcevich, C. (1984) "Differential quadrature for multi-dimensional problems", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 101, No. 2, pp. 423-443.

-de Araújo, P. C., Soares, J. B., de Holanda, Á. S., Parente, E. and Evangelista, F. (2010) "Dynamic viscoelastic analysis of asphalt pavements using a finite element formulation", Road Materials and Pavement Design, Vol. 11, No. 2, pp. 409-433.

-De Jong, D., Peatz, M. and Korswagen, A. (1973) "Computer program Bisar layered systems under normal and tangential loads", Konin Klijke Shell-Laboratorium, Amsterdam. External Report AMSR, Vol. 6.

-Farid, M., Zahedinejad, P. and Malekzadeh, P. (2010) "Three-dimensional temperature dependent free vibration analysis of functionally graded material curved panels resting on two-parameter elastic foundation using a hybrid semi-analytic, differential quadrature method", Materials and design, Vol. 31, No. 1, pp. 2-13.

-Harichandran, R. S., Baladi, G. Y. and Yeh, M.-S. (1989) "Development of a computer program for design of pavement systems consisting of bound and unbound materials", Department of Civil and Environmental Engineering, Michigan State University.

-Huang, C.-W., Abu Al-Rub, R. K., Masad, E. A. and Little, D. N. (2011) "Three-dimensional simulations of asphalt pavement permanent deformation using a nonlinear viscoelastic and viscoplastic model", Journal of Materials in Civil Engineering, Vol. 23, No. 1, pp. 56-68.

-Huang, Y. H. (2004) "Pavement design and analysis": Pearson/Prentice Hall.

-Hwang, D. and Witczak, M. (1979) "Program DAMA (Chevron) "User's Manual", Department of Civil Engineering, University of Maryland, MD.

Numeric Methods in Engineering: Theory and Application, Swansea, UK.

-Shu, C. and Richards, B. E. (1992) "Application of generalized differential quadrature to solve two- dimensional incompressible Navier- Stokes equations", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 15, No. 7, pp. 791-798.

-Siddharthan, R., Zafir, Z. and Norris, G. M. (1993) "Moving load response of layered soil. I: Formulation", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 119, No. 10, pp. 2052-2071.

-Simo, J. and Hughes, T. J. (1998) "Computational inelasticity, volume 7 of Interdisciplinary Applied Mathematics": Springer-Verlag, Berlin.

-Sorvari, J. and Hämäläinen, J. (2010) "Time integration in linear viscoelasticity—a comparative study", Mechanics of Time-Dependent Materials, Vol. 14, No. 3, pp. 307-328.

-The MathWorks, I. MATLAB Release 2016b. Natick, Massachusetts, United States.: The MathWorks, Inc.

-Varma, S. and Kutay, M. E. (2016) "Viscoelastic Nonlinear Multilayered Model for Asphalt Pavements", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 142, No. 7, pp. 04016044.

-Wang, D., Roesler, J. R. and Guo, D.-Z. (2011) "Innovative algorithm to solve axisymmetric displacement and stress fields in multilayered pavement systems", Journal of Transportation Engineering, Vol. 137, No. 4, pp. 287-295.

-Wang, X. (2015) "Differential quadrature and differential quadrature based element meththeory and applications": Butterworth-Heinemann.

-Warren, H. and Dieckmann, W. (1963) "Numerical computation of stresses and strains in a multiple-layer asphalt pavement system", International Report, Chevron Research Corporation, Richmond, CA.

reinforced composite laminated plates", Meccanica, Vol. 50, No. 1, pp. 143-167.

-Muliana, A. and Khan, K. A. (2008) "A time-integration algorithm for thermo-rheologically complex polymers", Computational Materials Science, Vol. 41, No. 4, pp. 576-588.

-Park, S. and Schapery, R. (1999) "Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I—A numerical method based on Prony series", International Journal of Solids and Structures, Vol. 36, No. 11, pp. 1653-1675.

-Quan, J. and Chang, C.-T. (1989) "New insights in solving distributed system equations by the quadrature method—II. Numerical experiments", Computers and chemical engineering, Vol. 13, No. 9, pp. 1017-1024.

-Raad, L. and Figueroa, J. L. (1980) "Load response of transportation support systems", Journal of Transportation Engineering, Vol. 106, No. 1, pp. 111-128.

-Secor, K. E. and Monismith, C. L. (1961) "Analysis of triaxial test data on asphalt concrete using viscoelastic principles". Paper presented at the Highway Research Board Proceedings.

-Sherbourne, A. N. and Pandey, M. D. (1991) "Differential quadrature method in the buckling analysis of beams and composite plates", Computers and Structures, Vol. 40, No. 4, pp. 903-913.

-Shu, C. (1991) "Generalized differential-integral quadrature and application to the simulation of incompressible viscous flows including parallel computation", University of Glasgow.

-Shu, C. (2012) "Differential quadrature and its application in engineering": Springer Science and Business Media.

-Shu, C. and Richards, B. (1990) "High resolution of natural convection in a square cavity by generalized differential quadrature". Paper presented at the Proceedings of the 3rd International Conference on Advances in

-Zaghloul, S. M. and White, T. (1993) "Use of a three-dimensional, dynamic finite element program for analysis of flexible pavement", Transportation Research Record, No. 1388, pp. 60-69.

-Zhao, Y., Ni, Y., Wang, L. and Zeng, W. (2014) "Viscoelastic response solutions of multilayered asphalt pavements", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 140, No. 10, pp. 04014080.

-Zocher, M. (1995) "A three dimensional finite element evaluation of linear viscoelastic composites with particular reference to matrix cracking". (Ph.D. Dissertation), Texas AandM University.

-Zocher, M., Groves, S. and Allen, D. (1997) "A three-dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, No. 12, pp. 2267-2288.

سینا رامش‌خواه، درجه کارشناسی در رشتهٔ مهندسی عمران را در سال ۱۳۹۲ از دانشگاه فسا و درجه کارشناسی ارشد در رشتهٔ مهندسی عمران – گرایش ژئوتکنیک را در سال ۱۳۹۶ از دانشگاه خلیج فارس اخذ نمود. زمینه های پژوهشی مورد علاقه ایشان کاربرد روشهای عددی نظیر دیفرانسیل کوادرچر و اجزاء محدود در مهندسی عمران (ژئوتکنیک و روسازی) است.

سید حامد معراجی، درجه کارشناسی در رشته مهندسی عمران – عمران را در سال ۱۳۸۲ از دانشگاه خلیج فارس و درجه کارشناسی ارشد در رشته سازه های هیدرولیکی را در سال ۱۳۸۵ از دانشگاه علم و صنعت ایران اخذ نمود. در سال ۱۳۹۱ موفق به کسب درجه دکتری در رشته مهندسی آب و سازه های هیدرولیکی از دانشگاه علم و صنعت ایران گردید. زمینه های پژوهشی مورد علاقه ایشان مدلسازی عددی و بهینه سازی در حوزه مکانیک جامدات و سیالات بوده و در حال حاضر عضو هیات علمی با مرتبه استادیار در دانشگاه خلیج فارس است.

پرویز ملک زاده، درجه کارشناسی در رشته مهندسی مکانیک را در سال ۱۳۷۱ از دانشگاه شیراز و درجه کارشناسی ارشد در رشته مهندسی مکانیک را در سال ۱۳۷۴ از دانشگاه شیراز اخذ نمود. در سال ۱۳۸۲ موفق به کسب درجه دکتری در رشته مهندسی مکانیک از دانشگاه شیراز گردید. زمینه های پژوهشی مورد علاقه ایشان مکانیک محاسباتی، مکانیک مواد مرکب و ارتعاشات سازه ها بوده و در حال حاضر عضو هیات علمی با مرتبه استادی در دانشگاه خلیج فارس بوشهر است.

محمود ملکوتی علون آبادی ، درجه کارشناسی در رشته مهندسی عمران – عمران را در سال ۱۳۷۸ از دانشگاه خلیج فارس و درجه کارشناسی ارشد در رشته عمران–راه و ترابری را در سال ۱۳۸۱ از دانشگاه علم و صنعت ایران اخذ نمود. در سال ۱۳۹۲ موفق به کسب درجه دکتری در رشته مهندسی عمران–راه و ترابری از دانشگاه علم و صنعت ایران گردید. زمینه های پژوهشی مورد علاقه ایشان مدلسازی عددی روسازی راه، مکانیک مصالح ویسکوالاستیک و مخلوطهای آسفالتی بوده و در حال حاضر عضو هیات علمی با مرتبه استادیار در دانشگاه خلیج فارس است.