# استفاده از روش بهینه‌سازی و فراابتکاری به‌منظور کاهش سرفاصله زمانی اتوبوس (نمونه موردی: خطوط اتوبوس‌رانی قزوین)

شهریار افندی زاده، (مسئول مکاتبات)، دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

حمید بیگدلی راد، دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

حمید شاکر، دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

E-mail:zargari@iust.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۰۵ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۰۸

## چکیده

*یکی از مهم‌ترین پارامترها در ارزیابی میزان رضایت مسافران سیستم اتوبوس‌رانی، فراوانی اتوبوس‌ها و یا سرفاصله زمانی بین آن‌هاست. در این مطالعه مسئله بهینه‌سازی فراوانی سیستم حمل‌ونقل عمومی موردبررسی قرارگرفته است، که هدف آن تعیین فاصله زمانی بین اتوبوس‌های بعدی برای مجموعه‌ای از خطوط حمل‌ونقل عمومی است که توسط برنامه‌های سفر آن‌ها تعیین می‌شود. نتیجه حاصله باید تقاضای مبدأ-مقصد داده‌شده و محدودیت در ناوگان اتوبوس‌رانی موجود را برآورده سازد. به‌این‌ترتیب یک مدل برنامه‌ریزی خطی مختلط عدد صحیح (MILP) برای یک مدل از قبل موجود پیشنهاد شد، که در اصل به‌عنوان یک فرمول دوسطحی غیرخطی تدوین‌شده است. فرمولاسیون پیشنهادی قادر به حل موارد واقعی بهینگی مسائل کوچک‌مقیاس با استفاده از تکنیک MILP است. برای حل موارد بزرگ‌مقیاس یک روش فرا ابتکاری پیشنهاد شد که دقت آن با مقایسه نتایج دقیق برآورد شده است. هر دو رویکرد دقیق و تقریبی، با استفاده از موارد موجود تست‌شده است، به‌این‌ترتیب از سیستم حمل‌ونقل عمومی شهر قزوین به‌عنوان نمونه‌های موردی در این مطالعه استفاده شد. اگرچه سیستم حمل‌ونقل عمومی آن دارای ۲۲ خط بود، پیشرفتی حدود ۶ درصد با استفاده از این مدل به دست آمد. این نشان می‌دهد که حتی در موارد کوچک، جا برای بهبود بهره‌وری سیستم وجود دارد. ازآنجاکه یافتن بهینگی کلی از شهر قزوین پس از مقدار قابل‌توجهی از زمان اجرا امکان نداشت، در این مطالعه یک روش راه‌حل جایگزین پیشنهاد شد. بنابراین، یک رویکرد فرا ابتکاری جستجوی ممنوعه ارائه شد که نتایج آن در مقایسه با مدل دقیق، رقابتی است.*

**واژه های کلیدی:** بهینه‌سازی فراوانی اتوبوس، سیستم اتوبوس‌رانی، MILP

## ۱. مقدمه

هنگام طراحی یک سیستم حمل‌ونقل عمومی، تصمیم‌گیری‌های برنامه‌ریزان بر هزینه‌های سیستم تأثیرگذار خواهد بود، که با هزینه‌های پولی عملیات، کرایه و زمان سفر کاربران تعیین می‌شود. در سیستم‌های مبتنی بر اتوبوس، پنج مرحله برای طراحی یک سیستم حمل‌ونقل عمومی مشخص می‌شود: طراحی شبکه مسیرها، تنظیم فراوانی، طراحی جدول زمانی، تخصیص ناوگان و تخصیص خدمه [Masson et al. 2017]. در سیستم‌های واقعی، این مراحل معمولاً پی‌درپی انجام می‌شوند، که در آن تصمیمات گرفته شده در یک مرحله مشخص بر تصمیم‌گیری در مراحل بعدی تأثیر خواهد گذاشت. همچنین، این تصمیمات برای افق‌های برنامه‌ریزی مختلف گرفته می‌شوند، خواه زمینه برنامه‌ریزی بلندمدت باشد، خواه میان‌مدت و یا کوتاه‌مدت [Laporte et al. 2017].

مشکل تنظیم فراوانی به معنی تعیین فاصله زمانی بین اتوبوس‌های متعاقب هم در خطوط، بر اساس برنامه سفر آن‌ها (دنباله‌ای از بخش‌های خیابانی و ایستگاه‌های اتوبوس) و تقاضای مشخص‌شده توسط یک ماتریس مبدأ–مقصد است [López-Ramos et al. 2017]. در طول برنامه‌ریزی استراتژیک یک سیستم حمل‌ونقل عمومی (به‌ویژه، هنگام طراحی برنامه سفر خطوط، به‌عنوان‌مثال شبکه مسیر)، تنظیمات اولیه فراوانی موردنیاز است[Hasaninasab et al. 2012]. همچنین، در طول برنامه‌ریزی تاکتیکی، تنظیم فراوانی برای تقاضای تغییرات در طول فصول مختلف سال و یا زمانی از روز و یا به‌عنوان پاسخی به تغییرات در طراحی شبکه مسیر لازم است [Canca et al. 2016]. فراوانی هم بر کاربران (زمان انتظار، ظرفیت خطوط) و هم بر اپراتورها (هزینه‌های عملیاتی که با اندازه ناوگان موردنیاز تعیین می‌شود) تأثیر می‌گذارد. در مقالات مختلف، با مسئله تنظیم فراوانی به‌عنوان یک مسئله بهینه‌سازی برخورد شده است، که در آن معمولاً تابع هدف، به حداقل رساندن زمان کلی سفر کاربران (راه رفتن، سوارشدن و انتظار) ، تحت محدودیت (قید) اندازه ناوگان و همچنین دیگر محدودیت (قید) های زیرساخت و سیاست را بیان می‌دارد [Ataei et al. 2017; Constantin and Florian, 1995; Han and Wilson, 1982; Schéele et al. 1981]. ازآنجاکه مدل‌های بهینه‌سازی فراوانی باید شامل اقدامات مربوط به عملکرد سیستم ازنظر کاربران (مثلاً زمان انتظار) باشد، باید یک زیر مدل از رفتار کاربران در خصوص مجموعه‌ای از خطوط اتوبوس را در برداشته باشد [Liu, 2017]. چنین مدلی که با عنوان مدل فرعی تخصیص شناخته‌شده است، معمولاً روش تدوین و راه‌حل‌های پیچیده‌ای دارد، به‌خصوص زمانی که تأثیر ظرفیت اتوبوس در مدل‌سازی رفتار کاربران در نظر گرفته می‌شود. این پیچیدگی بخش مهمی از پیچیدگی کلی مدل بهینه‌سازی فراوانی را تعیین می‌کند. علاوه بر این، اعتبار مدل تخصیص برای حمل‌ونقل عمومی، در اکثر موارد، به محتوای واقعی محلی بستگی دارد که در آن استفاده می‌شود.

مطالعات موجود در مورد بهینه‌سازی فراوانی معمولاً شامل مدل‌های غیرخطی است که به‌طور تقریبی حل می‌شوند [Constantin and Florian, 1995; Schéele et al. 1981]. غیرخطی بودن از این واقعیت ناشی می‌شود که زمان انتظار تناسب معکوسی با فراوانی دارد. همچنین، مدل‌سازی تعامل میان خطوط مختلف منجر به عبارت غیرخطی می‌گردد. مدل‌های موجودی که تخصیص زیر مدل‌های موجود را در نظر می‌گیرد، درجات مختلفی از واقع‌گرایی را دارا هستند. موارد مورداستفاده برای آزمایش روش‌های مختلف از موارد کوچک و ساختگی گرفته تا مواردی با اندازه متوسط مربوط به شهرهای واقعی متشکل از حدود ۱۰۰ خط متغیر هستند [Yu et al. 2010].

## ۲. تاریخچه ادبیات

در این بخش، مطالعات گذشته در زمینه بهینه‌سازی فراوانی برای سیستم‌های حمل‌ونقل عمومی ارائه می‌شود. تقریباً در تمام مدل‌ها گره‌ها نشان‌دهنده ایستگاه‌های اتوبوس، مراکز هندسی

(نقاط فرضی که در آن تقاضای یک منطقه مشخص، متمرکز فرض شده است) و یا نقطه پایانی یک بخش برنامه سفر خط هستند. کمان‌ها نشان‌دهنده یک بخش از برنامه سفر یک خط، یک مسیر پیاده‌روی (بین نقاط هندسی و ایستگاه) و یا یک رویداد یا عمل خاص، مثل انتظار برای یک خط و یا انجام یک انتقال بین خطوط مختلف هستند. علاوه بر این، معمولاً فرض بر این است که تقاضا بین مناطق مختلف شهر (ارائه‌شده توسط نقاط هندسی) در قالب یک ماتریس مبدأ–مقصد (OD) داده می‌شود. هر مؤلفه غیر صفر این ماتریس جفت OD نامیده می‌شود [Chen et al. 2004]. شایان‌ذکر است که سطوح مختلف جزئیات مدل نمودار مذکور را می‌توان در مقالات یافت نمود.

مدل ارائه‌شده در کار آقای شیل و همکاران، ۱۹۸۱ به حداقل رساندن مسیر پیاده‌روی و زمان سفر سوار بر اتوبوس به‌علاوه زمان انتظار را تذکر می‌دهد. محدودیتی بر حد بالایی اندازه ناوگان تحمیل می‌شود. رفتار کاربران به‌طور ضمنی در مدل‌ها گنجانده‌شده است: با توجه به جفت OD، تقاضای آن در میان خطوط مختلف بنا بر آنتروپی و محدودیت ظرفیت اتوبوس تقسیم می‌شود. این فرمول یک تابع هدف غیر محدب و خطی و یا محدودیت‌های محدب دارد. الگوریتم جواب، یک راه‌حل تقریبی با تصحیح مجموعه‌ای از فراوانی‌ها مطابق با استراتژی نزول محاسبه می‌کند. این روش با یک مورد مربوط به شهر لینکوپینگ (سوئد) ، با ٦ خط و ۳۸ منطقه تست‌شده است[Schéele et al. 1981].

در مطالعه هان و ویلسون، ۱۹۸۲ یک مدل برای تنظیم فراوانی در خطوط به‌شدت مزاحم ارائه‌شده است. بنابراین تابع هدف بیانگر به حداقل رساندن سطح اشغال در نقطه به‌شدت مزاحم بر روی هر مسیر در سیستم است. مجموعه محدودیت شامل حدود بالا در اندازه ناوگان و ظرفیت اتوبوس است. مدل فرعی واگذاری با یک محدودیت غیرصریح ارائه می‌شود که فرضیه مربوط به رفتار کاربر را کدگذاری می‌کند: مسافران به خطوطی اولویت می‌دهند که به‌طور مستقیم به مقصد منتهی می‌شوند، اگرچه به معنای زمان سفر بیشتر باشند [Han and Wilson, 1982]. علاوه بر این قانون، تقاضای مربوط به یک جفت OD داده‌شده به دنبال قاعده تقسیم فراوانی در میان خطوط مختلف توزیع می‌شود [Börjesson et al. 2017]. یک روش اکتشافی دومرحله‌ای برای حل مدل ارائه‌شده است: اول، یک روش تخصیص پایه (که به‌صورت تکراری جریان مسافر و فراوانی خط را اصلاح می‌کند) ؛ دوم، یک روش تخصیص مازاد که یک مسئله را تنها با محدودیت‌های خطی حل می‌کند. اگرچه این روش برای اعمال در شهر قاهره (مصر) پیشنهاد شد، تنها یک مورد شامل ٦ گره و ۳ مسیر نشان داده‌شده است.

مسئله بهینه‌سازی فراوانی در کار کنستانتین و فلوریان، 1995، به‌عنوان یک مسئله دوسطحی غیرخطی بیان‌شده است. در این مدل، سطح بالاتر نشان‌دهنده برنامه‌ریزی است که می‌خواهد از حداقل زمان سفر کلی و امکان‌سنجی اندازه ناوگان مطمئن شود. سطح پایین‌تر کاربری را نشان می‌دهد که با به حداقل رساندن زمان سفر، مطابق با مدل تخصیص استراتژی‌های بهینه عمل می‌کند [Constantin and Florian, 1995]. بنابراین، توابع هدف هر دو سطوح جملات یکسانی دارد. این مدل به‌طور تقریبی با یک الگوریتم تکرارشونده بر اساس یک گرادیان نزولی حل می‌شود که از ویژگی‌های خاص مسئله استفاده می‌کند. این روش با استفاده از موارد مربوط به شهرهای استکهلم (سوئد) ، وینیپگ (کانادا) و پورتلند (ایالات‌متحده امریکا) ، به ترتیب شامل ۳۸، ٦۷ و ۱۱۵ خط تست‌شده است.

در کار "گائو و همکاران"، ۲۰۰٤ یک مدل چند هدفه ارائه‌شده است، که به دنبال به حداقل رساندن زمان کلی سفر کاربران و هزینه‌های عملیاتی اپراتورها است (فرض شده است که به‌صورت خطی متناسب با فراوانی‌ها است) [Gao et al. 2004]. از ویژگی‌های برجسته این کار درونی سازی ازدحام در رفتار کاربران است. برای یک مجموعه مشخص از فراوانی‌ها، مدل تخصیص پیشنهادشده در کار دسی و فرناندز، ۱۹۹۳ [de

[Cea and Fernández, 1993] استفاده‌شده است، که توزیع تقاضا را با توجه به فراوانی مؤثر انجام می‌دهد. جواب تقریبی ارائه‌شده با یک مجموعه اولیه از فراوانی‌ها است که به‌صورت پی‌درپی با استفاده از روش آنالیز حساسیت بهبود می‌یابد. این روش با استفاده از یک مثال بسیار کوچک متشکل از ٤ گره و ٤ خط تست‌شده است.

اخیراً، یو و همکاران ۲۰۱۰ یک الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی فراوانی اتوبوس پیشنهاد کرده‌اند. این اولین کاربرد الگوریتم‌های فراابتکاری برای این مشکل است. این مدل بهینه‌سازی به حداقل رساندن زمان در وسیله بودن و زمان انتظار ، تحت محدودیت اندازه ناوگان را در نظر می‌گیرد. رفتار کاربران با استفاده از مدل تخصیص استراتژی‌های بهینه مدل‌سازی شده است [Yu et al. 2010]. جواب تقریبی از یک عدد صحیح کدگذاری فراوانی و عملگرهای ژنتیکی استفاده می‌کند که ناوگان‌های موجود در میان خطوط مختلف سیستم را مجدداً توزیع می‌نماید. این روش با مورد مربوط به شهر دالیان (چین) متشکل از ۳۰۰٤ ایستگاه اتوبوس و ۸۹ خط تست‌شده است.

دیگر مرجع بهینه‌سازی فراوانی سیستم حمل‌ونقل را می‌توان در کار [dell'Olio et al. 2012; Ruisánchez et al. 2012] یافت که در آن یک مدل دوسطحی ارائه‌شده است. سطح بالایی به دنبال بهبود یک تابع هزینه‌های کلی با فراوانی‌ها و اندازه اتوبوس متفاوت است ؛ هر دو الگوریتم هوک–جویس و الگوریتم جستجوی ممنوعه به‌عنوان جستجوی اکتشافی استفاده می‌شوند. مسئله سطح پایین‌تر مشکل تخصیص محدود ظرفیت تدوین‌شده توسط دسی و فرناندز (۱۹۹۳) را حل می‌کند.

این نویسندگان روش را با استفاده از مورد از شهر سانتاندر (اسپانیا) ، متشکل از ۱۵ خط اتوبوس مورد آزمایش قراردادند. همچنین، در کار زتو و وو بهینه‌سازی فراوانی به‌طور اکتشافی به‌عنوان بخشی از مشکل طراحی شبکه حمل‌ونقل حل می‌شود و با یک منطقه مسکونی در حومه شهر هنگ‌کنگ شامل ۱۰ خط تست می‌گردد[Szeto and Wu, 2011].

## ۳. روش انجام تحقیق

### ۳-۱ مدل ریاضی

مدل این تحقیق اساساً بر مبنای مدل ارائه‌شده توسط کنستانتین و فلوریان (۱۹۹۵) استوار است. این مدل دارای یک فرمولاسیون صریح بر اساس مدل تخصیص استراتژی‌های بهینه است (اسپیس و فلوریان، ۱۹۸۹). علاوه بر این، مدل بهینه‌سازی فراوانی کنستانتین و فلوریان (۱۹۹۵) نه روش حل دقیقی دارد و نه دارای یک تقریب معتبر در برابر نتایج دقیق است. به‌منظور ارائه مدل، ابتدا نمایه خطوط، تقاضا و رفتار کاربر توضیح داده می‌شود. سپس، مدل و روش خطی سازی پیشنهادی برای بهینه‌سازی فراوانی ارائه می‌شوند. در این تحقیق دو هدف دنبال خواهد شد:

– یک فرمول برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط (MILP) برای یک مدل بهینه‌سازی فراوانی از پیش موجود پیشنهاد شد. با توجه به ماهیت فرمول ارائه‌شده، می‌توان آن را دقیقا با استفاده از حل‌کننده MILP حل نمود. به‌علاوه، شامل یک مدل فرعی تخصیص [Spiess and Florian, 1989] است که به‌طور گسترده‌ای در مقالات پذیرفته‌شده است.

– همچنین برای شهرهای متوسط یک روش فرا ابتکاری پیشنهاد شد که صحت و دقت آن با مقایسه در برابر نتایج به‌دست‌آمده با مدل دقیق برآورد می‌شود (در صورت امکان، یعنی برای نمونه‌های کوچک‌تر). روش‌ها و الگوریتم‌های بهینه‌سازی به دو دسته الگوریتم‌های دقیق و الگوریتم‌های تقریبی تقسیم‌بندی می‌شوند. الگوریتم‌های دقیق قادر به یافتن جواب بهینه به‌صورت دقیق هستند اما در مورد مسائل بهینه‌سازی سخت کارایی کافی ندارند و زمان اجرای آن‌ها متناسب با ابعاد مسائل به‌صورت نمایی افزایش می‌یابد. به همین دلیل در این مطالعه به سراغ روش‌های فرا ابتکاری رفته شده است که زیرمجموعه روش‌های تقریبی است.

با توجه به مورد اول، لازم به ذکر است که هیچ‌یک از روش‌های موجود در مقالات قادر به پیدا کردن جوابی با بهینگی ثابت‌شده

(جهانی) نیست. این امر به‌ویژه در مسئله بهینه‌سازی فراوانی حمل‌ونقل مهم است، زیرا پیشرفت‌های گزارش‌شده جواب‌های فعلی در طول زمان سفر برای کاربران نسبتاً اندک است [Yang et al. 2007].

الگوریتم فراابتکاری حاضر قادر به یافتن راه‌حل‌هایی است که دقت آن‌ها (در صورت امکان) با مقایسه در برابر راه‌حل‌های دقیق برآورد شده است. تاجائی که مطالعه شد، این اولین روش تقریبی منتشرشده است که نتایج آن در برابر نتایج بهینه به‌دست‌آمده با استفاده یک مورد واقعی معتبر است [Szeto et al. 2011]. الگوریتم فرا ابتکاری نتایجی در مدت‌زمان نسبتاً کوتاه حاصل خواهد کرد و شامل اموری عادی است که در مواقعی که چندین زمان موجود باشد، اجرا می‌شود (با توجه به تعداد خطوط، اندازه مدل نمودار زمینه‌ای و تراکم ماتریس مبدأ–مقصد) ، ازاین‌رو برای به‌کارگیری در حل‌وفصل موارد بزرگ‌تر مناسب است [Nikolić and Teodorović, 2013].

**جدول ۱. نشانه‌های اصلی و تعاریف آن‌ها**

| | |
|---|---|
| **J** | **گراف سیستم حمل‌ونقل عمومی** |
| **N** | مجموعه‌ای از گره‌ها |
| **$N^p(N^s)$** | مجموعه گره‌های ایستگاه‌ها (نقطه پایانی هر قسمت خیابان) |
| **L** | مجموعه کمان‌ها |
| **$L^T$** | مجموعه کمان‌های سفر |
| **$L^T(L^L)$** | مجموعه کمان‌های سوارشدن (پیاده شدن) |
| **$L^+_n(L^-_n)$** | مجموعه کمان‌های بیرون رونده (داخل شونده) از (به) گره n |
| **H** | مجموعه خطوط |
| $\boldsymbol{\alpha}$ | مجموعه فراوانی‌ها |
| $\boldsymbol{\tau_{hf}}$ | متغیری که نشان می‌دهد که فراوانی $\alpha_f$ در خط h تنظیم‌شده است یا خیر |
| **w** | حد بالایی در اندازه ناوگان |
| **$C_a$** | هزینه کمان a |
| $\boldsymbol{d_a}$ | مقدار تقاضا جاری از طریق کمان a |
| $\boldsymbol{f_a}$ | مقدار فراوانی خط متناظر با کمان سوارشدن a |
| $\boldsymbol{f_{(a)}}$ | شاخصی در فراوانی $\alpha$ که نشانگر کمان a است |
| $\boldsymbol{h_{(a)}}$ | شاخصی در h خط متناظر با کمان a |
| **Z** | مجموعه جفت‌های OD |
| **$O_z(D_z)$** | گره مبدأ (مقصد) kجفت OD |
| $\boldsymbol{\gamma_z}$ | مقدار سفرهای k جفت OD |
| $\boldsymbol{u_n}$ | زمان انتظار ضرب شده در تقاضا در گره ایستگاه n |
| $\boldsymbol{I_n}$ | مقداری برابر با $\gamma_z$ اگر $n=O_z$, و $-\gamma_z$ اگر $n=D_z$, و در غیر این صورت برابر ۰ |

در این مطالعه یک سیستم حمل‌ونقل عمومی با مؤلفه‌های عرضه و تقاضا در نظر گرفته می‌شود. در طرف عرضه، خطوطی وجود دارد که برنامه‌های سفر آن‌ها با توجه به ایستگاه‌های اتوبوس و بخش‌های خیابانی موجود تعریف‌شده است؛ فراوانی آن‌ها توسط مدل بهینه‌سازی تعیین خواهد شد. در طرف تقاضا، کاربرانی وجود دارند که نیاز به انجام سفرهایی بین نقاط مختلف شهر دارند؛ همچنین، با توجه به مجموعه‌ای از خطوط، کاربران باید تصمیم بگیرند که چگونه چنین سفرهایی را با استفاده از آن خطوط به انجام برسانند.

طرف عرضه به‌عنوان یک گراف $J=(N, L)$ ارائه می‌شود که در آن مجموعه N شامل گره‌هایی است که نشان‌دهنده ایستگاه‌های اتوبوس و نقاط پایانی بخش‌های خیابان برای هر خط است (به ترتیب $N^P$ و $N^S$ ، به‌طوری‌که $N = NP \cup NS$). کمان‌های بین گره‌های $N^S$ کمان سفر نامیده می‌شود (مجموعه $L^T$). آن‌ها نشان‌دهنده حرکت اتوبوس‌ها (و مسافران سوار بر آن) در امتداد خیابان هستند، که در یک زمان سفر ثابت نامنفی $c_a$ سپری می‌شود $a \in L^T$؛ کمان‌هایی که از $N^P$ به $N^S$ حرکت می‌کنند، کمان سوارشدن (مجموعه $L^B$) و برعکس، کمان‌های در حال حرکت از $N^S$ به $N^P$ را کمان پیاده شدن (مجموعه‌ای $L^L$) می‌نامند. این مجموعه‌ها به‌گونه‌ای هستند که $L = L^T \cup L^B \cup L^H$. بر اساس این مدل، یک مجموعه معین از خطوط L در نظر گرفته می‌شود که در آن هر خط یک برنامه سفر روبه‌جلو و یک

برنامه رو به عقب و یا یک برنامه سفر چرخشی تک دارد. یک برنامه سفر یک دنباله از کمان‌های سفر مجاور است. برای هر خطی که $h \in H$، در نظر گرفته می‌شود، که الحاق برنامه‌های سفر آن (یا برنامه سفر تکی آن اگر مدور است) یک چرخه بسته را شکل می‌دهد، بنابراین می‌توان زمان رفت‌وبرگشت آن را به‌صورت $\sum_{a\in h} c_a$ بیان کرد.

به‌منظور ساده‌سازی، فرض می‌شود که تقاضا (هم تولیدشده و جذب شدن) در ایستگاه‌های اتوبوس به وجود می‌آید [Al-Mudhaffar et al. 2016]. مدل‌سازی دقیق‌تر شامل گره‌های مرکزی نشانگر مناطق و کمان راه رفتن است که چنین نقاط هندسی را به ایستگاه اتوبوس متصل می‌کند. گنجاندن این مؤلفه‌ها ماهیت فرمول موردبحث در این کار را تغییر نمی‌دهد. تقاضا به‌صورت یک مجموعه از z جفت OD ارائه می‌شود به‌طوری‌که $O_z, D_z \in N^p$ به ترتیب مبدأ و مقصد $z \in Z$ جفت OD است و مقدار نامنفی $\gamma_z$ نشان‌دهنده مقدار متناظر آن با سفرها (افراد در واحد زمان) در افق زمانی مشخص هستند.

برای نشان دادن رفتار کاربر، می‌بایست یک مدل فرعی تخصیص را در نظر گرفت. این کار بیانگر راهی است که در آن کاربران، با استفاده از مجموعه‌ای از خطوط حمل‌ونقل عمومی خود را از مبدأ به مقصد می‌رسانند. محاسبه عملکرد سیستم، یعنی زمان انتظار و اشغال بودن اتوبوس تجربه‌شده توسط کاربران لازم است. توجه داشته باشید که تصمیم‌گیری کاربران به فراوانی خط بستگی دارد. ازآنجایی‌که آن‌ها متغیرهای تصمیم مدل بهینه‌سازی کلی این مطالعه هستند، مدل فرعی تخصیص یک جزء بسیار مرتبط است.

مدل تخصیص ارائه‌شده در کار اسپیس و فلوریان، ۱۹۸۹، با نام استراتژی‌های بهینه در نظر گرفته می‌شود. یک استراتژی به‌عنوان مجموعه‌ای از قوانین تعریف می‌شود که زمانی که اعمال می‌شوند، کاربر را قادر به رسیدن به مقصد خود می‌نماید. ازنظر شبکه J و برای یک Z جفت OD مشخص، یک استراتژی می‌تواند به‌عنوان یک زیرمجموعه از کمان‌ها در L دیده شود که نشان‌دهنده تمام خطوطی است که کاربر از قبل برای سفر از $O_z$ به $D_z$ شناسایی کرده بود. این مدل فرض می‌کند که یک کاربر مشخص استراتژی را انتخاب می‌کند که زمان سفر وی را به حداقل برساند. برای انجام این کار، او از قبل (یعنی قبل از خروج از محلی که سفر از آن آغاز می‌شود) مجموعه‌ای از خطوط جذاب را در میان تمام خطوط ممکنی که ایستگاه‌های اتوبوس مبدأ و مقصد وی را به هم متصل می‌کنند برمی‌گزیند. در این فرایند، مسافر اطلاعات مربوط به زمان سوار بودن بر اتوبوس تمام خطوط سیستم (که با هزینه کمان سفر در J تعیین‌شده است) در نظر می‌گیرد؛ او همچنین فراوانی موردنیاز تمام خطوط، برای محاسبه زمان انتظار را می‌داند. درحالی‌که در ایستگاه اتوبوس انتظار می‌کشد، کاربر به اولین اتوبوسی که از آن ایستگاه عبور می‌کند سوار می‌شود، که به مجموعه‌ای از خطوط جذاب از پیش تعیین‌شده تعلق دارد. یک استراتژی در صورتی مطلوب است که کل زمان سفر مورد انتظار را به حداقل می‌رساند.

همان‌گونه که در مقالات پذیرفته‌شده است، زمان انتظاری که یک مسافر در یک ایستگاه برای مجموعه‌ای از خطوط $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ با فراوانی متناظر $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ منتظر می‌ماند را می‌توان با یک متغیر تصادفی از مقدار میانگین $E(tu) = \beta / \sum_{r_i \in R} f_i$ مدل‌سازی نمود. که در آن $\beta$ پارامتری است که به فرضیات مربوط به نظم خدمات بستگی دارد. علاوه بر این، با فرض اینکه مسافران به اولین اتوبوسی که به ایستگاه می‌رسد، سوار شوند (در میان اتوبوس‌هایی که مسیرهایی از مجموعه R را طی می‌کنند) ، احتمال استفاده از مسیر $r_i$ برابر است با $P_i = f_i / \sum_{r_i \in R} f_j$ ، که با عنوان قانون سهم فراوانی شناخته‌شده است.

پس از معرفی متغیرهای $Q_n$ (جریان در گره n) و $X_a$ (یک متغیر دودویی (باینری) که نشان می‌دهد آیا کمان a متعلق به استراتژی بهینه هست یا خیر) ، می‌توان مسئله تخصیص را به‌صورت به حداقل رساندن زمان سفر فرمول نویسی نمود که در آن تابع هدف شامل عبارت زمان انتظار است: $1 / \sum_{a\in L_n^+} f_a x_a$ و قانون

سهم فراوانی به شکل $Q_a = Q_n f_a x_a / \sum_{a' \in L_n^+} f_{a'} x_{a'}$ درمی‌آید که در آن $Q_a$ مقدار تقاضای جاری از طریق کمان $a \in L$, است. $A_n^+$ کمان‌های خروجی از گره $n$ و $f_a$ فراوانی (اتوبوس در واحد زمان) خط متناظر با کمان سوارشدن $a$ است. این مسئله بهینه‌سازی شامل عبارت‌های غیرخطی و متغیرهای باینری است؛ به‌منظور اطلاع از جزئیات کامل به چاپ اصلی آن (اسپیس و فلوریان، ۱۹۸۹) مراجعه می‌شود. در متن این مطالعه، به‌درستی در نظر گرفته می‌شود که به‌وسیله یک تغییر متغیر و ملاحظات در مورد فضای عملی مدل حاصل، محققان مطالعه اصلی مدل را ساده کنند. بنابراین، با معرفی متغیر $u_n = Q_n / \sum_{a \in L_n^+} f_a x_a$ از حذف متغیر $x_a$ ، مدل تخصیص را می‌توان، برای یک جفت OD تک به شرح زیر فرمول نویسی نمود:

$$Min \sum_{a \in L} c_a Q_a \sum_{n \in N^p} u_n \qquad (۱)$$

s.t.

$$\sum_{a \in L_n^+} Q_a - \sum_{a \in L_n^-} Q_a = I_n \quad \forall n \in N \qquad (۲)$$

$$Q_a \le 1.06 f_a u_a \quad \forall n \in N^p \ , \ a \in L_n^+ \qquad (۳)$$

$$V_a \ge 0 \quad , \quad \forall a \in L \qquad (٤)$$

که در آن $u_n$ زمان انتظار ضرب‌در مقدار تقاضا در گره $n \in N_p$ است. $L_n^-$ کمان‌های وارد شونده به گره $n$ و $w_n$ یک مقدار برابر است با $\gamma_z$ اگر $n=O_z$ و $-\gamma_z$ اگر $n=D_z$ در غیر این صورت برابر ۰.

فرمول (۱) تا (٤) بیان می‌دارد که کاربران درجهت به حداقل رساندن مجموع زمان سفر سوار بر اتوبوس و زمان انتظار رفتار می‌کنند. محدودیت (۲) نشانگر بقای جریان است، به این معنی که کل تقاضا باید قادر به رسیدن به مقصد باشد. در محدودیت (۳) ، $Q_a$ صفر است اگر کمان $a$ بخشی از استراتژی مطلوب نباشد، درحالی‌که برای کمان‌های موجود در جواب بهینه، محدودیت با توجه به عبارت قانون سهم فراوانی برابری را تائید می‌کند. این فرمول خطی است و شباهت زیادی با مسئله یافتن کوتاه‌ترین مسیر دارد. تفاوت در این است که تابع هدف (۱) شامل یک جمله است که نشان‌دهنده انتظار در گره‌ها و محدودیت است و (۳) نشان‌دهنده تقسیم تقاضا در میان خطوط جذابی است که از یک ایستگاه مشخص عبور می‌کند و به مقصد منتهی می‌شود. به دلیل آن محدودیت، جواب مشکل تخصیص یک مسیر واحد در نمودار نیست، بلکه مسیری چندگانه‌ای است که نشان‌دهنده مسیرهای مختلف از مبدأ تا مقصد است.

### ۳-۲ مدل بهینه‌سازی فراوانی

مدل حاضر، برای بهینه‌سازی فراوانی بر مبنای مدل کنستانتین و فلوریان (۱۹۹۵) استوار است، که دارای یک فرمول دوسطحی غیرخطی است. تفاوت کلیدی مدل پیشنهادی این مطالعه وارد نمودن یک ساختار کمکی از نمودار موردنظر است، که اجازه می‌دهد یک فرمول خطی به دست آمد که تحت شرایط خاصی دارای یک ساختار تک سطحی است.

متمایزسازی دامنه فراوانی‌ها را به‌وسیله مجموعه معینی از $\alpha \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ تعریف می‌شود که در آن هر مؤلفه $\alpha_i$ یک مقدار غیرمنفی نشان‌دهنده یک مقدار ممکن است برای فراوانی هر خط است. تنظیمات امکان‌پذیری فراوانی‌ها باید یک مقدار از $\alpha$ به هر خط $h \in H$ تنظیم نماید. علاوه بر این، یک ساختار جدید برای $J$ تعریف می‌شود که در آن هر خط عبوری از یک ایستگاه مشخص یک کمان سوارشدن برای هر مقدار مشخص از $\alpha$ داشته باشد.

سپس یک $E_{hf}$ متغیر باینری وارد می‌شود که اگر فراوانی $\alpha_f$ روی خط $l$ تنظیم شود، مقدار ۱ را خواهد گرفت. بر اساس این تعاریف و مدل فرعی تخصیص اعلام‌شده توسط فرمول‌های (۱) تا (٤) مدل بهینه‌سازی فراوانی به‌صورت فرمول‌های (۵) – (۱۲) تدوین شدند که در آن $w$ حد بالایی در اندازه ناوگان، $f_{(a)}$ نشان‌دهنده پارامتر در $\alpha$ فراوانی است که کمان $a$ را دوباره ارائه می‌کند و $h_{(a)}$ نشان‌دهنده خط متناظر با آن کمان است. توجه داشته باشید که پارامتر $z$ برای نشان دادن جفت OD متناظر اضافه شده است.

فرمول‌های (۵) تا (۱۲) به‌طور هم‌زمان تصمیمات برنامه‌ریز در مورد تنظیم فراوانی (متغیر$E$) ، و همچنین تصمیمات مربوط به

مسافران در مورد تخصیص جریان (متغیرهای Q و u) را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که اگرچه تابع هدف متغیر E را شامل نمی‌شود، محدودیت (٦) و (٧) مقادیر احتمالی آن را معین می‌کند. در میان آن‌ها، مدل آن‌هایی را انتخاب خواهد کرد که Q و u را با توجه به محدودیت‌هایی که شامل چنین متغیرهایی می‌شوند به حداقل برساند. مقادیر جریان کمان Q در تابع هدف به حداقل می‌رسند (٨) و در دسترس بودن کمان (١٠) قرار می‌گیرد. زمان انتظار u نیز در تابع هدف به حداقل می‌رسد، درحالی‌که محدودیت (٩) به‌عنوان کران پایینی برای مقادیر آن عمل می‌کند.

$$Min \sum_{z\in Z}(\sum_{a\in L} c_a Q_{az} + \sum_{n\in N^p} u_{nz}) \quad (٥)$$

s.t.

$$\sum_{h\in H}\sum_{f\in 1\dots m} \alpha_f E_{hf} \sum_{a\in h} c_a \le w \quad (٦)$$

$$\sum_{f\in 1\dots m} E_{hf} = 1 \qquad \forall h \in H \quad (٧)$$

$$\sum_{a\in L_n^+} Q_{az} - \sum_{a\in L_n^-} Q_{az} = I_{nz} \quad \forall n \in N, \quad z \in Z \quad (٨)$$

$$Q_{az} \le \alpha_{f(a)} u_{nz} \qquad \forall n \in N^p, \quad z \in Z, \quad a \in L_n^+ \quad (٩)$$

$$Q_{az} \le \gamma_z E_{h(a)f(a)} \quad \forall a \in L^w, \quad z \in Z, \quad a \in L_n^+ \quad (١٠)$$

$$Q_{az} \ge 0 \qquad \forall a \in L, \qquad z \in Z \quad (١١)$$

$$E_{hf} \in \{0,1\} \qquad h \in H \qquad f \in 1 \dots m \quad (١٢)$$

مشاهده می‌شود که برای یک وضعیت مشخص از فراوانی در خطوط (مقدار ثابت E) که محدودیت‌های (٦) و (٧) را رعایت می‌کند، مسئله خطی حاصل نشان‌دهنده مسائل تخصیص مستقل از $|z|$ آن‌گونه که در (١) تا (٤) ارائه شد، است. محدودیت (٩) شامل یک فراوانی ثابت است درحالی‌که محدودیت (١٠) معادله اضافی برای $E_{h(a)f(a)}$ است؛ بنابراین، در شرایطی که دیگر محدودیت‌های شامل متغیر Q و u موجود نباشند، فرمول یک سطحی عدد صحیح مختلط پیشنهادی معادل (محدود به گسسته سازی) فرمول دوسطحی غیرخطی ارائه‌شده در کار کنستانتین و فلوریان، (١٩٩٥) است.

تحولات ارائه‌شده در این مطالعه، منبع اصلی پیچیدگی مسئله را به چیزی متفاوت تغییر داده است. درحالی‌که فرمول اصلی دوسطحی غیرخطی است (که برای آن هیچ روش راه‌حل استانداردی وجود ندارد) فرمول پیشنهادی عدد صحیح خطی مختلط است (که راه‌حل دقیق آن در دسترس است). منبع اصلی پیچیدگی فرمول پیشنهادی وجود متغیرهای باینری است. علاوه بر این، گسسته نمودن دامنه فراوانی مجموعه کمان‌های سوارشدن را (و عدد مربوطه متغیرهای Q) به یک عامل برابر با اندازه α مجموعه فراوانی‌های امکان‌پذیر گسترش می‌دهد.

### ٣-٣رویکرد فرا ابتکاری

اگرچه فرمول MILP پیشنهادشده محاسبه جواب بهینه برای مسئله بهینه‌سازی فراوانی را امکان‌پذیر می‌سازد، انتظار می‌رود نمونه‌هایی در اندازه بزرگ به‌سختی قابل‌حل باشند. توجه داشته باشید که با معرفی گسسته سازی دامنه فراوانی، مسئله به یک مسئله ترکیبی تغییر می‌شود که فضای جستجو در آن (در بدترین حالت) اندازه نمایی $|\alpha|^{|H|}$ را دارد.

به‌منظور مقابله با این پیچیدگی، یک رویکرد فرا ابتکاری بر اساس جستجوی ممنوعه [Glover and Laguna, 1998] ارائه می‌شود. این روش بر اساس یک جستجوی محلی در بازه فراوانی‌ها (تصمیمات برنامه‌ریز) استوار است، درحالی‌که متغیرهای نشان‌دهنده تصمیمات کاربران با مدل فرعی تخصیص (١) تا (٤) محاسبه می‌شود. به‌منظور جلوگیری از افتادن به دام بهینه‌های محلی، از مفاهیم ممنوعه برای مکانیسم پایه جستجوی محلی استفاده شد. استراتژی جستجو بر عملگرهایی استوار است که دانش در مورد مشکل واقعی را در هم می‌آمیزند. سپس، یک روش نزول به‌طور طبیعی در پی استفاده از آن عملگرها تعریف می‌شود. مکانیسم‌های ویژه‌ای از جستجوی ممنوعه برای جلوگیری از استناد زیاد به مدل فرعی تخصیص بکار می‌روند (که ممکن است ازنظر محاسباتی پرهزینه باشند). در ادامه، مفاهیم اصلی در الگوریتم فرا ابتکاری پیشنهادی را ارائه می‌شود.

### ٤-٣ روش محلی

روند محلی جستجو این است که از یک عملیات به نام حرکت برای تعریف مجاورت هرگونه راه‌حل داده‌شده گلاور و لاگونا،

۱۹۹۸ استفاده می‌کند. راه‌حل مطرح‌شده در این تحقیق توسط ردیفی از پارامترها برای مجموعه‌ای از فراوانی‌های $\alpha$ ارائه می‌شود. هر مکان در ردیف نشان‌دهنده یک خط از سیستم حمل‌ونقل عمومی، و مقدار آن نشان‌دهنده فراوانی آن خط است. فرض می‌شود که مجموعه‌ای از فراوانی‌های ممکن از پایین‌ترین ($\alpha_1$) به بالاترین ($\alpha_m$) مقدار مرتب می‌شوند. به‌این‌ترتیب، یک خط زمانی فراوانی خود را افزایش (کاهش) می‌دهد که به بالاترین (کمترین) مقدار بعدی در $\alpha$ تغییر کند. می‌بایست بررسی شود که کاهش فراوانی یک خط در یک جواب، همیشه باعث می‌شود کمتر جاذب (از نقطه‌نظر دید کاربر) شود و یا در بهترین حالت برابر باشد. در مقابل، افزایش فراوانی خط در یک جواب، آن را جاذب‌تر می‌سازد و یا حداقل برابر است. عملیات حرکت که ساختار مجاور را تعریف می‌کند، پس‌ازآن یک تغییر ترکیبی در یک جفت از فراوانی‌های خط جواب است، یکی تغییر را افزایش و دیگری کاهش می‌دهد. با این عملیات پایه، زمانی که فراوانی هر خط بتواند کاهش یا افزایش یابد، هر جواب دارای $|H| \times (|H| - 1)$ راه‌حل مجاور خواهد بود.

### ۳-۵ جستجوی ممنوعه

جستجوی ممنوعه یک الگوریتم فرا ابتکاری است که یک روش محلی برای کشف فضای جواب فراتر از بهینگی محلی را هدایت می‌کند [Ruiz-Vanoye and Díaz-Parra, 2011; Hu et al. 2018]. به‌منظور انجام این کار، ممکن است جستجو حرکاتی را قبول کند که جواب فعلی را بدتر کرده و حرکاتی را رد کند که به‌تازگی انجام‌شده‌اند. یکی از اجزای اصلی جستجوی ممنوعه استفاده آن از حافظه است. مطالعه حاضر بر استراتژی‌های حافظه کوتاه‌مدت تمرکز دارد.

### ۳-٦ اکتشاف محلی

به‌عنوان یک راه سیستماتیک برای کشف جواب‌های همسایه، استراتژی آرمانی مضاعف پیاده شد. این استراتژی تعداد مضاعف (پلاس) از جواب‌ها را بعد از پیدا کردن یک راه‌حل که مقادیر عینی آن ارزش آرمانی را بهبود می‌بخشد، شناسایی می‌کند. برای محدود نگه‌داشتن تعداد جواب‌های همسایه، این استراتژی از دو مقدار استفاده می‌کند که نشان‌دهنده حداقل و حداکثر تعداد جواب‌ها برای کشف است (به ترتیب پارامترهای حداقل و حداکثر). به‌طور خاص، اگر مقدار آرمانی (ارزش آسپیراسیون) در طول اکتشاف از همسایه i ام آن پیشی گرفته یا به آن مقدار برسد، جستجو مشخص خواهد کرد [Glover and Laguna, 1998]:

الف- همسایه‌های پلاس اگر

$$Max \leq Plus+i \leq Min$$

ب- همسایه‌های مینیمم اگر

$$Min > Plus + i$$

ج- همسایه‌های ماکسیمم اگر

$$Plus+ i > Max$$

همسایه‌های کاندید حاصل از اعمال استراتژی فوق‌الذکر به ترتیبی تصادفی ارزیابی می‌شوند.

### ۳-۷ تابع هدف و محدودیت‌ها (قیود)

به‌منظور بررسی هر جواب همسایه، الگوریتم برحسب تنظیم پیشنهادشده در (اسپیس و فلوریان، ۱۹۸۹) اعمال شد که مدل تخصیص فرموله شده توسط (۱) تا (٤) را حل کرد. به‌طورکلی، این الگوریتم به کوتاه‌ترین مسیر الگوریتم برچسب تنظیم بسیار شبیه است [Ahuja et al. 1993] تفاوت اصلی این است که علاوه بر در نظر گرفتن هزینه‌های کمان، فراوانی در خطوط مشترک را در نظر می‌گیرد، که جریان را تقسیم نموده و درنتیجه ساختاری چند راه در جواب ایجاد می‌کند.

## ٤. نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی به‌دست‌آمده از اعمال مدل دقیق و روش حل تقریبی ارائه‌شده گزارش می‌شود. در ابتدا مقادیر تابع هدف در سه مساله با ابعاد مختلف مقایسه شده و میزان بهبود روش دقیق و فراابتکاری معین می گردد.

۱. مورد مندل که یک شهرستان کوچک است. نمودار آن شامل ۱۸ گره و ۲۵ کمان بدون جهت بود. ماتریس OD شامل

۱۸۱ جفت OD است، که در خصوص تعداد گره ها مقدار بسیار بالایی است.

۲. مورد، شهر ریورا در کشور اروگوئه است که نمودار آن شامل ۸۷ گره و ۱٤۸ کمان بدون جهت است، در حالی که ماتریس OD آن ۳۸٦ جفت OD دارد که نشان دهنده تقاضا در یک افق زمانی ۱۲ ساعته است. مجموعه ای از خطوط نمایانگر سیستم حمل و نقل عمومی شهر در نظر گرفته شد .۱۲ خط با برنامه های سفر رفت و برگشت و ۳ خط چرخشی وجود دارد.

۳. مورد بعدی مربوط به سالتو استکه شبکه آن ۹۸ گره و ۱٦۱ کمان دارد. داده های مبدا–مقصد به طور تصادفی تولید شد، تا ویژگی های واقعی آن حفظ شود؛ بنابراین شامل ٤۰۱ جفت OD که به طور مساوی در طول شهر توزیع شده است.

مطابق جدول (۲) یک شهر کوچک و دو شهر بزرگ مقیاس، مورد آزمایش قرار گرفتند. در ستون اول و دوم مقادیر تابع هدف از روش های دقیق و تقریبی آورده شده است که تفاوت کمی با یکدیگر داشته و همچنین درصد بهبودهای آنها هم در ستونهای چهارم و پنجم آورده شده است. همچنین زمان اجرا (به ثانیه) را به ترتیب به‌صورت $T_e$ و $T_a$، و اختلاف نسبی $f_e$ (%) نیز در ستون انتهایی بیانگر اختلاف مقدار دقیق و تقریبی است.

در منطقه موردمطالعه مطابق شکل (۱) تعداد ٤۷۹ ایستگاه و ۷۱۱ کمان وجود دارد. مدل MILP در زبان برنامه‌ریزی ریاضی اجرا شده و با استفاده از نرم‌افزار بهینه‌ساز CPLEX حل شد. الگوریتم فرا ابتکاری مذکور نیز به زبان پایتون پیاده‌سازی شد. با توجه به سیستم‌عامل‌های آزمایشی مختلفی که استفاده شد، زمان اجرا به‌طور مستقیم قابل‌مقایسه نیست. به‌طورکلی زمان اجرا برای نشان دادن امکان‌سنجی استفاده از هر روش ارائه‌شده است.

جدول ۲. **مقادیر تابع هدف در چندین مساله با ابعاد مختلف و مقایسه آنها میزان بهبود روش دقیق و فراابتکاری**

| | $G_e$ | $G_a$ | $R_e$(%) | $R_a$(%) | $T_e$ | $T_a$ | $f_e$ (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **مندل** | ۱۴۱,۲۶ | ۱۴۴,۸۹ | - | - | ۲۴۷۸ | ۱> | ۱۹ |
| **ریورا** | ۵۲۶,۳۴ | ۵۳۱,۲۵ | ۳,۵۷ | ۲,۸۹ | Ed | 115 | ۱۸ |
| **سالتو** | ۵۹۴,۶۸ | ۶۰۱,۴۳ | ۳,۶۴ | ۲,۹۶ | Ed | 124 | 18 |

**شکل ۱. منطقه موردمطالعه**

### ٤-١ مقایسه مقادیر واقعی

جدول ۲ مقادیر هدف (زمان سفر کلی کاربران) از روش‌های دقیق و تقریبی (Ge و Ga به ترتیب) ، و همچنین درصد بهبود (Re و Ra به ترتیب) را با توجه به ارزش واقعی سیستم فعلی نشان می‌دهد. همچنین زمان اجرا (به ثانیه) را به ترتیب به‌صورت Te و Ta، و شکاف نسبی MIP روش دقیق را به شکل fe نشان می‌دهد (مقدار محاسبه‌شده و گزارش‌شده توسط CPLEX، نمایانگر فاصله نسبی بین بهترین جواب عدد صحیح و یک کران پایین است). مدل دقیق یا بعد از پیدا کردن بهینه کلی یا زمانی که یک محدودیت زمانی تحمیل‌شده فرارسید متوقف شد. الگوریتم فرا ابتکاری، پس از حداکثر تعداد کل تکرارها و یا حداکثر تعداد تکرارهای بدون بهبود متوقف شد. از جدول ۳ می‌توان مشاهده کرد که ارزش‌های واقعی به‌دست‌آمده توسط مدل دقیق و الگوریتم تقریبی برای هر دو آزمون بسیار شبیه است. به‌منظور به دست آوردن نتایج با مدل دقیق، یک محدودیت زمانی ٤٨ ساعته در نظر گرفته می‌شود که پس‌ازآن یک راه‌حل عملی با

۲۱ درصد خلأ MIP نسبی به دست آمد. انتظار می‌رود که حل بهینگی در مدت‌زمان نسبتاً کوتاه بسیار دشوار باشد. علاوه بر این، یک پیشرفت بسیار کند از بهبود جواب در حل خطی مشاهده شد.

این آزمایش نشان می‌دهد که (الف) روش MILP پیشنهادشده قادر به محاسبه بهینه کلی برای یک مورد کوچک است و (ب) قادر به بهبود کیفیت یک سیستم موجود از یک شهر واقعی کوچک است. درنهایت، توجه داشته باشید که الگوریتم فرا ابتکاری پیشنهادی نیز راه‌حل‌های خوب در یک زمان بسیار کوتاه ارائه می‌کند.

### ٤-٢ مقایسه جواب‌های به‌دست‌آمده

جدول ٤ ترتیبی در $\alpha$ از فراوانی راه‌حل دقیق و تقریبی هر خط را برای سیستم موجود نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است، درحالی‌که روش دقیق فراوانی ۱۱ خط از ۲۲ خط را تغییر می‌دهد، روش تقریبی ۱۵ مورد را تغییر می‌دهد. درحالی‌که مورد اول، فراوانی ۵ خط را افزایش و ٦ مورد دیگر را کاهش می‌دهد، مورد دوم، ۷ فراوانی را افزایش و ۸ مورد را کاهش می‌دهد. اگر فقط به فراوانی‌های پیشنهادشده توسط روش پیشنهادی نگاه شود، می‌توان مشاهده کرد که ۱۰ مورد از ۲۲ خط نتایج متفاوتی نشان می‌دهند. شایان‌ذکر است که فراوانی‌های پیشنهادشده توسط مدل و الگوریتم حاضر، یک محدودیت در حداکثر زمان انتظار در نظر نمی‌گیرد. به همین دلیل، ازآنجاکه راه‌حل پیشنهادشده نشان‌دهنده یک توزیع مجدد منابع در دسترس (ناوگان اتوبوس) در میان کاربران سیستم است، برخی از جفت OD های خاص ممکن است نتایج بی‌فایده‌ای باشند، زیرا این نمونه مربوط به آن‌هایی است که در دو خط آخر قدرت انتخاب بین حمل‌ونقل عمومی و خصوصی را ندارند (captive) هستند.

**جدول ۳. نتایج دقیق و تقریبی، مقادیر واقعی**

| | $G_e$ | $G_a$ | $R_e$(%) | $R_a$(%) | $T_e$ | $T_a$ | $f_e$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **شهر قزوین** | ۱۲٤٥,۳٦ | ۱۲٥۲,٤۸ | ۷,۱۲ | ٦,۸٥ | Ed | ۲۱٦ | ۲۱ |

Ed محدوده زمانی فرارسیده است

**جدول ٤. نتایج دقیق و تقریبی، فراوانی‌های حاصل**

| تعداد فراوانی سیستم موردنظر در حالات مختلف | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| خط | وضع موجود | روش دقیق | روش تقریبی | خط | وضع موجود | روش دقیق | روش تقریبی |
| **۱** | ۹ | ۹ | ۱۰ | ۱٤ | ۱٤ | ۱٤ | ۱٥ |
| **۲** | ۱٥ | ۱٦ | ۱٦ | ۱٥ | ۱۲ | ۱۲ | ۱۱ |
| **۳** | ۱۰ | ۹ | ۹ | ۱٦ | ۲۳ | ۲۱ | ۲۱ |
| **٤** | ۲۲ | ۲۲ | ۲۱ | ۱۷ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۲ |
| **٥** | ۱۸ | ۱٦ | ۱۸ | ۱۸ | ۱٤ | ۱٥ | ۱٤ |
| **٦** | ۱۱ | ۱۱ | ۱۱ | ۱۹ | ۱۰ | ۱۰ | ۱۰ |
| **۷** | ۷ | ۸ | ۷ | ۲۰ | ۱۲ | ۱۱ | ۱۱ |
| **۸** | ۱٤ | ۱٤ | ۱۲ | ۲۱ | ۱۳ | ۱۳ | ۱٤ |
| **۹** | ۹ | ۹ | ۱۱ | ۲۲ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۲ |
| **۱۰** | ۱٦ | ۱٦ | ۱٦ | | | | |
| **۱۱** | ۲٤ | ۲۱ | ۲۱ | | | | |
| **۱۲** | ۷ | ۷ | ۷ | | | | |
| **۱۳** | ۲۲ | ۱۹ | ۱۹ | | | | |

### ٤-٣ مدل بدون انتقال

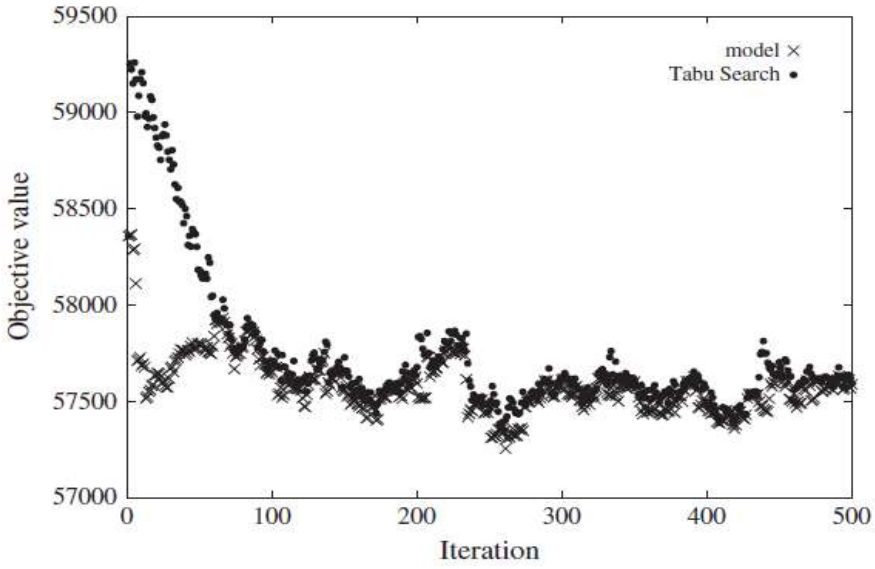
در شهر قزوین، کاربران سیستم حمل‌ونقل عمومی به‌ندرت نقل‌وانتقال بین خطوط مختلف را انجام می‌دهند. با توجه به این مشاهدات، یک برنامه‌نویسی اصلاح‌شده از گراف J انجام شد که امکان نقل‌وانتقالات را مستثنا می‌کند. این برنامه‌نویسی جایگزین، در مقایسه با مدل توضیح داده‌شده در بخش قبل حل مدل را ساده‌تر می‌کند. جدول ٥ همان اطلاعات جدول ٣، برای مدل فوق که در مورد قزوین به‌کاررفته است را نشان می‌دهد. می‌توان مشاهده کرد که در این آزمایش، می‌توان در زمان بسیار کمتر مدل را به‌منظور بهینه‌سازی حل نمود. علاوه بر این، الگوریتم فرا ابتکاری راه‌حلی پیدا می‌کند که دربردارنده مقدار واقعی بسیار نزدیک به بهینه کلی است. باید توجه داشته باشید که برنامه‌نویسی جایگزینی که برای گراف J برای به دست آوردن نتایج این آزمایش استفاده شد، برای استفاده از فرمول دقیق MILP که شامل امکان انتقال است، کارآمد نیست. این نتایج نشان می‌دهد که بر اساس فرضیه‌ای خاص (که در این بخش معتبر هستند) ، می‌توان مدل را زمانی که برای یک مورد کوچک واقعی استفاده می‌شود بهینه نمود.

### ٤-٤ توانایی الگوریتم در بهبود جواب اولیه

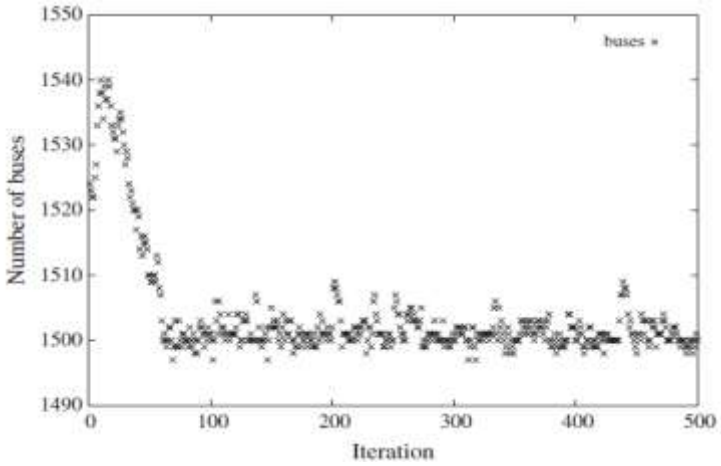
در این بخش، هدف اصلی این آزمایش مشاهده الف) توانایی الگوریتم در بهبود یک جواب (واقع‌گرایانه) اولیه و (ب) زمان اجرای موردنیاز برای رسیدن به چنین بهبودی است. جواب اولیه به‌عنوان جوابی تنظیم شد که در تمام خطوط فراوانی یکسانی دارد و مقدار متناظر اندازه ناوگان تا حد امکان به کران بالایی مربوطه نزدیک باشد. اجرای منفرد از الگوریتم انجام داده شد، تعداد ثابتی از تکرار یعنی ٥٠٠ تنظیم شد، و زمان اجرای حدود ٦٤ دقیقه در هر ١٠ تکرار مشاهده شد. درصد بهبود در خصوص جواب اولیه ١,٥درصد بود، مشاهده شد که بسیاری از خطوط راه‌حل بهبودیافته فراوانی خود را تغییر داده‌اند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم فرا ابتکاری قادر به بهبود جواب اولیه است، درحالی‌که بهبود مطابق با افزایش تعداد تکرارهای جستجوی محلی بالاتر است. شکل‌های (٢) و (٣) پیشرفت الگوریتم با توجه به تعداد تکرار را نشان می‌دهد. در شکل ٢ می‌توان مشاهده نمود که هر دو مقدار واقعی این مدل (داده‌شده توسط تابع هدف (٥)) و مقدار واقعی مدل فرا ابتکاری چندین چرخه‌دارند که با یک بهبود محلی پایان می‌پذیرند. بر این اساس، در شکل ٣ می‌توان مشاهده کرد که اندازه ناوگان، حول حداکثر مقدار اعمال‌شده توسط محدودیت (٦) نوسان دارد، که نتیجه مکانیزم طراحی‌شده برای ایجاد امکان جستجوی الگوریتم فراتر از فضای عملی است

**جدول ٥. مدل بدون انتقال**

| $T_a$ | $T_e$ | $R_a$(%) | $R_e$(%) | $G_a$ | $G_e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ٤٥ | ١٧٦ | ٧,١٣ | ٧,٤٢ | ١٣٠٥,٤٥ | ١٢٩٨,٢٤ |




**شکل ۲. پیشرفت الگوریتم با توجه به تکرار (مقدار هدف)**




**شکل ۳. پیشرفت الگوریتم با توجه به تکرار (اندازه ناوگان)**

## ۵. نتیجه‌گیری

بر اساس مدل ارائه‌شده در کار (کنستانتین و فلوریان، ۱۹۹۵)، یک فرمول برنامه‌نویسی خطی عدد صحیح مختلط (MILP) حاصل شد که معادل مدل دوسطحی غیرخطی پیشنهادی در مطالعه اصلی است. ماهیت فرمول این مطالعه پژوهشگران را قادر می‌سازد مسئله را دقیقا با استفاده از تکنیک MILP حل نمایند. با استفاده از مدل ارائه‌شده، این مطالعه قادر به محاسبه جواب بهینه یا تقریباً بهینه (با برآورد دقت آن) برای یک مورد مربوط به یک شهر کوچک واقعی خواهد بود. اگرچه سیستم حمل‌ونقل عمومی آن دارای ۲۲ خط بود، پیشرفتی حدود ٦ درصد با استفاده از این مدل به دست آمد. این امر بیانگر آن است که حتی در موارد کوچک، شرایط برای بهبود بهره‌وری سیستم وجود دارد. اگرچه راه‌حل‌های دستی از تجربه برنامه‌ریز بهره‌مند هستند، اما لزوماً مطلوب نیستند. بنابراین، مدل بهینه‌سازی ممکن است تغییراتی را نشان دهد که آشکار و یا ملموس نیستند. علاوه بر این، می‌توان بیان کرد که درصد بهبود در این تحقیق شبیه به نتایجی است که در مقالات [Constantine and Florian, 1995] گزارش‌شده است.

ازآنجا که یافتن بهینگی کلی از شهر قزوین پس از گذشت مقدار قابل‌توجهی از زمان اجرا امکان نداشت، همچنین نیاز به یک روش راه‌حل جایگزین پیشنهاد شد. بنابراین، یک رویکرد فرا ابتکاری جستجوی ممنوعه ارائه شد که نتایج آن در مقایسه با مدل دقیق، توانایی رقابت را داشت. روش تقریبی نیز با یک مورد بزرگ‌تر و دقیق‌تر مورد آزمایش قرار گرفت، که نشان‌دهنده توانایی آن در بهبود جواب اولیه در یک مدت‌زمان معقول است. در مورد روش‌های حل، فرمول دقیق می‌تواند با ترکیب کاهش‌ها و نابرابری‌های معتبر بهبود یابد. از سوی دیگر، روش فرا ابتکاری جستجوی ممنوعه به پیشرفت‌هایی اذعان می‌دارد، به‌ویژه در ایجاد جواب اولیه (احتمالاً از طریق اختلاط یک حافظه بلندمدت). همچنین، روش‌های ترکیبی (با دیگر الگوریتم‌های فرا ابتکاری و یا روش‌های دقیق) می‌تواند در نظر گرفته شود.

درنهایت، مدل فرعی تخصیص گنجانده‌شده در فرمول موردنظر برای بهینه‌سازی فراوانی حمل‌ونقل، فرض می‌کند که ظرفیت کافی برای حمل تمام مسافرانی که تمایل به استفاده از هر خط را دارند وجود دارد. اما در سیستم‌هایی که دارای فراوانی بالایی از مسافران هستند، این مطلب همیشه درست نیست. ظرفیت سیستم به‌طور مستقیم به فراوانی مربوط می‌شود. در مقالات، موضوع ظرفیت در زمینه بهینه‌سازی فراوانی با روش‌های مختلف حل شده است، ازجمله مدل‌هایی که در آن برنامه‌ریز ظرفیت کافی را تضمین می‌کند و مدل‌هایی که رفتار مسافر را در یک سناریوی متراکم فرض می‌نمایند. مفروضات اساسی این مدل‌ها، اثرات متفاوتی بر عملکرد کلی سیستم دارد. بحث و بررسی بیشتر به‌منظور مقایسه این روش‌ها موردنیاز است.

## ٦. مراجع


-Ahuja, R., Magnanti, T. and Orlin, J. (1993) "Network Flows", Prentice-Hall.

-Al-Mudhaffar, A., Nissan, A. and Bang, K. L. (2016) "Bus stop and bus terminal capacity", Transportation Research Procedia, Vol. 14, pp. 1762-1771.

-Börjesson, M., Fung, C. M. and Proost, S. (2017)"Optimal prices and frequencies for buses in Stockholm", Economics of Transportation, Vol. 9, pp. 20-36.

-Canca, D., Barrena, E., De-Los-Santos, A. and Andrade-Pineda, J. L. (2016) "Setting lines frequency and capacity in dense railway rapid transit networks with simultaneous passenger assignment", Transportation Research Part B: Methodological, Vol. 93, pp. 251-267.

-Chen, Q., Niu, X. Q., Chen, X. W. and Wang, W. (2004) "Bus service frequency optimal model", Journal of Highway and Transportation Research and Development, Vol. 2, pp. 103-105.

-Constantin, I. and Florian, M. (1995) " Optimizing frequencies in a transit network: a nonlinear bi-level programming approach", International Transactions in Operational Research, Vol. 2, No. 2, pp. 149–164.

-De Cea, J. and Fernández, E. (1993) "Transit assignment for congested public transport systems: an equilibrium model", Transportation Science, Vol. 27, No. 2, pp. 133–147.

-dell'Olio, L., Ibeas, A. and Ruisánchez, F. (2012)"Optimizing bus-size and headway in transit networks", Transportation, Vol. 39, No. 2, pp. 449–464.

-Gao, Z., Sun, H. and Shan, L. (2004) "A continuous equilibrium network design model and algorithm for transit systems", Transportation Research Part B, Vol. 38, No. 3, pp. 235–250.

-Glover, F. and Laguna, M. (1998) "Tabu Search", Published by Springer.

-Han, A. F. and Wilson, N. M. (1982) "The allocation of buses in heavily utilized networks with overlapping routes", Transportation Research Part B, Vol. 13, No. 3, pp. 221–232.

-Hu, Q., Corman, F., Wiegmans, B. and Lodewijks, G. (2018) "A tabu search algorithm to solve the integrated planning of container on an inter-terminal network connected with a hinterland rail network", Transportation Research Part C: Emerging Technologies, Vol. 91, pp. 15-36.

-Laporte, G., Ortega, F. A., Pozo, M. A. and Puerto, J. (2017) "Multi-objective integration of timetables, vehicle schedules and user routings in a transit network", Transportation Research Part B: Methodological, Vol. 98, pp. 94-112

-Liu, X. (2017) "Optimizing rail defect inspection frequency to reduce the risk of hazardous materials transportation by rail", Journal of Loss Prevention in the Process Industries, Vol. 48, pp. 151-161.

-López-Ramos, F., Codina, E., Marín, Á. and Guarnaschelli, A. (2017) "Integrated approach to network design and frequency setting problem in railway rapid transit systems", Computers & Operations Research, Vol. 80, pp. 128-146.

-Masson, R., Trentini, A., Lehuédé, F., Malhéné, N., Péton, O. and Tlahig, H. (2017) "Optimization of a city logistics transportation system with mixed passengers and goods", EURO Journal on Transportation and Logistics, Vol. 6, No. 1, pp. 81-109.

-Nikolić, M. and Teodorović, D. (2013) "Transit network design by bee colony optimization", Expert Systems with Applications, Vol. 40, No. 15, pp. 5945-5955.

-Ruisánchez, F., dell'Olio, L. and Ibeas, A. (2012) "Design of a tabu search algorithm for assigning optimal bus sizes and frequencies in urban transport services", Journal of Advanced Transportation, Vol. 46, No. 4, pp. 366–377.

-Ruiz-Vanoye, J. A. and Díaz-Parra, O. (2011) "Similarities between meta-heuristics algorithms and the science of life", Central European Journal of Operations Research, Vol. 19, No. 4, pp. 445-466.

-Schéele, S. (1981) "A supply model for public transit services", Transportation Research Part B, Vol. 14, pp. 133–146.

-Spiess, H. and Florian, M. (1989) "Optimal strategies: a new assignment model for transit networks", Transportation Research Part B, Vol. 23, No. 2, pp. 83–102.

-Szeto, W. Y. and Wu, Y. (2011) "A simultaneous bus route design and frequency setting problem for Tin Shui Wai, Hong Kong", European Journal of Operational Research, Vol. 209, No. 2, pp.141-155.

-Yang, Z., Yu, B. and Cheng, C. (2007) "A parallel ant colony algorithm for bus network optimization", Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, Vol. 22, No. 1, pp. 44-55.

-Yu, B., Yang, Z. and Yao, J. (2010) "Genetic algorithm for bus frequency optimization", Journal of Transportation Engineering, Vol. 136, No. 6, pp. 576–583.

-عطائی، اسفندیار، توکلی مقدم، رضا و عزیزی، زینب. (۱۳۹۷) "بهینه‌سازی سیستم حمل‌ونقل عمومی با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی انبوه ذرات با بردار ارزیابی – مطالعه موردی در سازمان اتوبوس‌رانی"، فصلنامه مهندسی حمل‌ونقل. دوره نهم، شماره سوم، صفحه ٤١٣–٤٢٩.

-حسنی نسب، سید شهاب، صفارزاده، محمود و ممدوحی، امیررضا. (۱۳۹۱) " روشی برای مسیریابی بهینه در حمل‌ونقل همگانی یکپارچه شبکه اتوبوس و اتوبوس تندرو"، فصلنامه مهندسی حمل‌ونقل. دوره دوم، شماره چهارم، صفحه ۳۰۳–۳۱٦.

شهریار افندیزاده زرگری، درجه کارشناسی در رشته مهندسی عمران را در سال ۱۳٦٦ از دانشگاه علم و صنعت ایران و درجه کارشناسی ارشد در رشته راه و ترابری را در سال ۱۳٦۸ از دانشگاه علم و صنعت ایران اخذ نمود. در سال ۱۳۷۵ موفق به کسب درجه دکتری در رشته مهندسی حمل و نقل و ترافیک از دانشگاه کارلتون کانادا گردید. زمینه های پژوهشی مورد علاقه ایشان برنامه‌ریزی حمل ونقل، تجزیه و تحلیل ترافیک، مدلسازی در حمل و نقل، تحلیل و ارزیابی سیستم های حمل و نقل و حمل و نقل همگانی است و در حال حاضر عضو هیات علمی با مرتبه دانشیار در دانشگاه علم و صنعت ایران است

حمید بیگدلی راد، درجه کارشناسی در رشته مهندسی عمران را در سال ۱۳۹۲ از دانشگاه زنجان و درجه کارشناسی ارشد در رشته برنامه ریزی حمل و نقل را در سال ۱۳۹٤ از دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) قزوین اخذ نمود. هم اکنون نیز دانشجوی دکتری رشته برنامه ریزی حمل و نقل در دانشگاه علم و صنعت ایران است. زمینه های پژوهشی مورد علاقه ایشان برنامه ریزی حمل و نقل، مهندسی ترافیک، مدلسازی و بهینه سازی در حمل و نقل، سیستم های حمل و نقل عمومی و ایمنی در ترافیک است.

حمید شاکر، درجه کارشناسی در رشته مهندسی عمران را در سال ۱۳۹۳ از دانشگاه محقق اردبیلی و درجه کارشناسی ارشد در رشته راه و ترابری در سال ۱۳۹۵ را از دانشگاه علم و صنعت ایران اخذ نمود. هم اکنون نیز دانشجوی دکتری رشته راه و ترابری در دانشگاه علم و صنعت ایران است. زمینه های پژوهشی مورد علاقه ایشان مهندسی ترافیک، آسفالت، خستگی آسفالت و مکانیک شکست آسفالت است.